

# 応用電磁気学

Applied Electromagnetics

齋藤兆古

1/12/2007-2/15/2007 Version 1.2

6/21/2008 Version 1.2.1 一部訂正

1/17/2009 Version 1.2.2 一部訂正

# 目次

第 1 章 電磁界の支配方程式.....	1
1.1 磁界 $H$ の微分表現.....	3
1.2 電界 $E$ の微分表現.....	6
1.3 SCALAR POTENTIAL $\phi$ .....	14
1.4 VECTOR POTENTIAL $A$ .....	16
第 2 章 境界値問題と有限差分法.....	27
2.1 線形境界値問題.....	27
第 3 章 有限要素法入門.....	36
3.1 概要.....	36
3.2 変分原理.....	38
3.3 三角形一次有限要素 (FIRST ORDER TRIANGULAR FINITE ELEMENTS) .....	47
3.4 双反変分原理.....	71
3.5 VORONOI - DELAUNAY の離散化法 .....	79
3.6 まとめ.....	104
第 4 章 逆問題と不適切な線形システム.....	127
4.1 逆問題とは.....	127
4.2 システム方程式.....	131
4.3 不適切な線形システムの解.....	134
4.2 重みつき逆行列法の基礎.....	137
4.3 関数型重みつき逆行列法.....	149
4.4 重みつき逆行列法におけるノイズ処理.....	170
4.5 関数型重みつき逆行列法による 2 次元放射線源探査.....	186
4.6 関数型重みつき逆行列法による 2 次元磁界源探査.....	202

# 第1章 電磁界の微分方程式

## 1.1 磁界 $\mathbf{H}$ の微分表現

### 1.1.1 Dynamic fields

Maxwell の第2方程式  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  両辺の rotation を取ると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_s + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

を得る。ところで、 $\kappa$  を導電率(conductivity)[S/m]とすれば

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$$

の関係がある。これを Ohm の法則と呼ぶ。また

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

であるから

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = \kappa \nabla \times \mathbf{E} = \kappa \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.1.3)$$

の関係が成り立つ。これらを(1.1.1)式の右辺へ代入して

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0} \quad (1.1.4)$$

を得る。(1.1.4)式を磁界  $\mathbf{H}$  に対する同次 curl curl 方程式(Homogeneous curl curl equation for  $\mathbf{H}$ )と呼ぶ。

さて

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

であり、いま

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

とすれば、(1.1.4)式は

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.5)$$

となる。(1.1.5)式を  $\mathbf{H}$  の同次波動方程式(Homogeneous wave equation for  $\mathbf{H}$ )と呼ぶ。いま、導

体が存在しない自由空間を考えると

$$\kappa = 0, \varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \partial / \partial t = j\omega, \kappa_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} : \text{自由空間の波数} \quad \text{とすれば, (1.1.5)式}$$

は

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} + \kappa_0^2 \mathbf{H} = 0} \quad (1.1.6)$$

となる。この方程式は導波管(Wave guide)などの TE (Transverse electric) mode における固有周波数(Eigen frequency)などを求めるために使われる支配方程式である。

### 1.1.2 Quasi-static fields

(1.3.6)式で変位電流の項が無視できるとして rotation を取ると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_s \quad (1.1.7)$$

となる。(1.1.7)式の右辺に(1.1.2)式を代入して

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.8)$$

の関係を得る。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

を使えば

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.9)$$

を得る。(1.1.9)式を磁界 H の拡散方程式(Diffusion equation)と呼ぶ。

### 1.1.3 Static fields

静磁界系では

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

であるから、磁界系は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

が支配方程式となる。電界系は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

が支配方程式となる。磁界系と電界系は互いに独立になる。

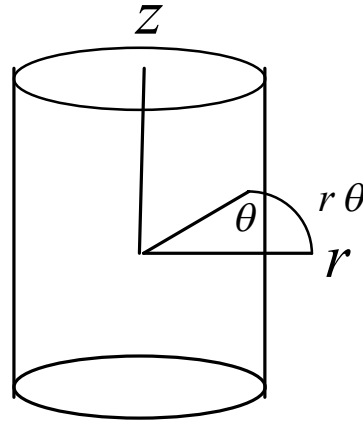
## 例題 [1. 1. 1]

(a) 円筒座標系における **gradient** 演算はどのようなになるか。

(解) 円筒座標系の変数は、半径  $r$  ,  
 角度  $\theta$  および高さ  $z$  であるから、任意  
 のスカラー  $\phi$  に対して、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{j}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

となる。右辺第 2 項は角度方向の長さが  $r\theta$  となるためである。



(b) 円筒座標系におけるベクトル  $\mathbf{A}$   
 に対する **divergence** 演算はどのような  
 になるか。

(解) 円筒座標系における体積  $V$  は  
 $V = \Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z$   
 であるから、

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta z \cdot r \Delta \theta}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z} A_r \right] + \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta z \cdot \Delta r}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z} A_\theta \right] + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta r \cdot r \Delta \theta}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z} A_z \right] \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r A_r \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial z} A_z \end{aligned}$$

となる。尚、円筒座標系における任意のスカラー  $\phi$  に対する Laplace の方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

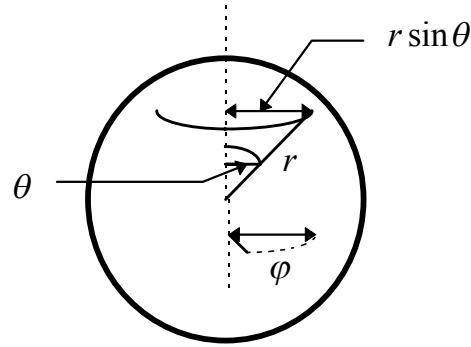
となる。

(c) 球座標系における **gradient** 演算はどのようなになるか。

(解) 球座標系の変数は、半径  $r$ , 角度  $\theta$  および  $\phi$  であるから、任意のスカラー  $\phi$  に対して、

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{j}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \mathbf{k}_\phi$$

となる。右辺第 2、3 項はそれぞれ角度  $\theta$  方向の長さが  $r\theta$ 、これに直交する方向



の長さが  $r \sin \phi$  となるためである。

(d) 球座標系におけるベクトル  $\mathbf{A}$  に対する divergence 演算はどのようなになるか。

(解) 球座標系における体積  $V$  は  $V = \Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \phi$  であるから、

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left( \frac{r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \phi}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \phi} A_r \right) \\ &+ \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta r \cdot r \sin \theta \Delta \phi}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \phi} A_\theta \right) \\ &+ \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta r \cdot r \Delta \theta}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \phi} A_\phi \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi \right) \end{aligned}$$

となる。尚、球座標系における任意のスカラー  $\phi$  に対する Laplace の方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right] \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

となる。

## 1.2 電界 $\mathbf{E}$ の微分表現

**1.2.1 Dynamic fields**

Maxwell の第 2 方程式の rotation を取ると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.10)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \mu \left( \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right)$$

を得る。(1.1.10)式の右辺は

(1.1.11)

と変形できるから、(1.1.10)式は

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.12)$$

となる。(1.1.12)式を E に対する同次 curl curl 方程式(Homogeneous curl curl equation for

E)と呼ぶ。また、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$  の関係から、(1.1.12)式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.13)$$

と変形できる。conductor の存在しない自由空間では

$$\kappa = 0, \varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \partial / \partial t = j\omega, \kappa_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \nabla \cdot \mathbf{E} = (1 / \varepsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

であるから

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.14)$$

の関係を得る。(1.1.14)式は Wave guide の TM (Transverse magnetic) mode における固有周波数(Eigen frequency)を求めるために使われる支配方程式である。

**1.2.2 Quasi-static fields**

(1.1.11)式で変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を無視すれば

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{J}_s = \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1.15)$$

となる。(1.1.15)式を(1.1.10)式の右辺に代入すれば

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.16)$$

の関係を得る。また

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.17)$$

とも書ける。自由電荷が存在しないとすれば、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\epsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  であるから

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.18)$$

となる。(1.1.18)式を電界  $\mathbf{E}$  に対する拡散方程式と呼ぶ。

### 1.2.3 Static fields

この場合は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

が支配方程式となり、電界系と磁界系は独立に取り扱える。

#### 例題 [1. 1. 2]

(a) 誘電体内で、 $E_x, H_y$  成分だけをもつ平面電磁波の一般解は

$$E_x = f_1(z - vt) + f_2(z + vt)$$

で与えられる。この式から、 $E_x$  と  $H_y$  の振幅比を求め、その位相を比較しなさい。

(解)  $z$  軸の正の方向に進む電磁波だけをとると

$$E_x = f_1(z - vt), \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

これを  $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  の関係より

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)} \frac{\partial(z - vt)}{\partial t} = -\epsilon v \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)}$$

$$dH_y = \epsilon v \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)} dz$$

であるから、積分して、

$$H_y = \epsilon v f_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1(z - vt)$$

である。振幅比（これを媒質の固有電波インピーダンスと呼ぶ）は

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$



となる。また、 $E_x$  と  $H_y$  の符号は同じであるから電界と磁界の位相は同じである。

次に  $z$  軸の負の方向に進む電磁波については、上記と同様にして、

$$E_x = f_1(z+vt), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_2(z+vt)$$

を得る。従って、振幅比は

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

となり、電界と磁界の符号が異なるから、位相は反対となる。よって、電界と磁界の振幅比はどれも等しく、 $z > 0$  の方向へ進む電磁波は電界と磁界の位相が等しく、 $z < 0$  の方向へ進む電磁波は電界と磁界の位相は反対である。いま、 $z$  方向へ進む電界の  $x$  成分を

$$E_x = f_x(z-ct),$$

$y$  成分を

$$E_y = f_y(z-ct)$$

とすれば、両者を合成したものが電界の強さとなり、磁界も同様である。電界と磁界は互いに垂直である。しかし、ある特定の点、例えば  $z = 0$  の点で、

$$E_x \text{ は } f_x(-ct), \quad E_y \text{ は } f_y(-ct)$$

で表される時間変化をする。いま、仮に電界が  $x$  成分のみからなり、 $E_y = 0$  ならば、電界の方向は常に一定していることとなる。このように電界の方向が常に一定しているものを平面電磁波と呼ぶ。電界の  $y$  成分  $E_y$  が零でなく  $|E_y| = |E_x|$  であり、且つ、電界の  $x$  成分  $E_x$  よりも時間的位相が  $\pi/2$  遅れているとすれば、電界の大きさは一定であるが方向は一定でなく、回転することとなる。このような電磁波を円偏波電磁波と呼ぶ。

(b) 電界が次式で表される平面電磁波の、空気中における磁界を求めよ。

$$E_x = E \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = 2.3 \times 10^{-5} \sin 10^4 \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad [V/m]$$

(解) 与えられた電磁波の電界は、位置的には  $z$  軸の正の方向にだけ変化するから、この電磁波は  $z$  軸の正方向へ進む。そして電界は  $x$  軸の方向にだけ振動するゆえ磁

界の振動は  $y$  軸方向に行われる。電界と磁界の関係は、 $\nabla \times \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B} / \partial t)$  より

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

であるから、

$$H_y = -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt = \frac{E}{\mu_0 v} \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right)$$

となる。

$$E = 2.3 \times 10^{-5}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8, \omega = 10^4$$

を代入して、

$$H_y = 6.1 \times 10^{-8} \sin 10^4 \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad [A/m]$$

となる。

(c) 電磁界の単位体積当たりのエネルギーは、電界と磁界によるエネルギー和で与えられる。

すなわち

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \quad [J/m^3]$$

である。しかし、例題 (a) の結果から、

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|$$

が成り立つから、

$$\frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$$

となる。従って、電磁波が単位面積を 1 秒間に通過するエネルギーは

$$U \cdot v = \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \quad [W/m^2]$$

である。この電力を Poynting Vector による電力と呼ぶ。(E.1.3.3)式参照。さて、太陽と地球とが平均距離にあり、地球を包む大気による吸収がなかったとき地表に

おいて日光に直角に向けた  $1[cm^2]$  の面積を 1 分間に通過する太陽放射エネルギーは、

$2.00[cal/cm^2 \quad min]$  である。地表上の電界および磁界を計算せよ。

(解) 太陽の放射線が地表に達したときは、これを平面電磁波と見ても良い。そうすると地上の電界を  $E$ 、磁界を  $H$  とすれば、日光に垂直な  $1[\text{cm}^2]$  を  $1[\text{s}]$  間に通過するエネルギーは

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{2.00}{60} \quad [\text{cal} / \text{cm}^2 \text{ s}] \\ &= \frac{2.00 \times 4.2 \times 10^4}{60} = 1.4 \times 10^3 \quad [\text{W} / \text{m}^2] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} E^2 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times 1.4 \times 10^3 = 5.5 \times 10^5, \quad E = 7.4 \times 10^2 \quad [\text{V} / \text{m}] \\ H &= \frac{1.4 \times 10^3}{E} = 1.9 \quad [\text{A} / \text{m}] \end{aligned}$$

(d) 半径  $a$ 、単位長さ当りの抵抗  $R$  をもつ導体があり、この導体に電流  $I$  が流れている。この導体に接近した半径  $r$ 、単位長の円筒面  $S_1$  とその上下端面  $S_2, S_3$  からなる閉曲面上のポインティングベクトルを求め、この閉曲面から流れ出す電力を求めよ。

(解)  $R$  は単位長さ当りの抵抗であるから、電界  $E$  は

$$\mathbf{E} = R\mathbf{I} \quad [\text{V} / \text{m}]$$

である。この電界  $E$  は円筒の軸方向であり、また、電流  $I$  の作る磁界  $H$  は

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi r} \quad [\text{A} / \text{m}]$$

であり、その方向は円筒の円周方向である。このため、ポインティングベクトル

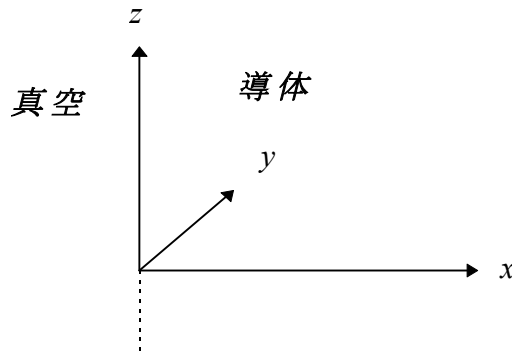
$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{W} / \text{m}^2]$$

は円筒面  $S_1$  方向のみとなり、 $S_2$  と  $S_3$  方向には存在しない。従って、

$$P = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} ds = RI \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = RI^2 \quad [\text{W} / \text{m}]$$

の電力が導体の外側方向へ出て行くこととなり、これは抵抗損失に等しい。

(e) 下図に示すように、真空と導体が平面の境界で接している。真空中の磁界が  $z$  方



向成分を持った大きさ  $H_0 \operatorname{Re}(\operatorname{Exp}(j\omega t))$  の平等磁界とする。導体中の磁界と電流分布を求めよ。

(解) (1.1.9)式で、 $\partial/\partial t = j\omega$  として、

$$\nabla^2 \mathbf{H} - j\omega\kappa\mu\mathbf{H} = 0$$

または

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + j\omega\kappa\mu H_z = 0$$

が成り立つ。この方程式の一般解は

$$H_z = K_1 \varepsilon^{\sqrt{j\omega\kappa\mu}x} + K_2 \varepsilon^{-\sqrt{j\omega\kappa\mu}x}$$

書ける。ここで、

$$\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから、

$$H_z = K_1 \operatorname{Exp}\left(\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x + j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) + K_2 \operatorname{Exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x - j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right)$$

ともかける。ところで、磁界  $H_z$  は

$$x \rightarrow 0 \quad H = H_0, \quad x \rightarrow \infty \quad H = 0$$

であるから、

$$H_0 = K_1 + K_2, \quad K_1 = 0$$

より、 $K_2 = H_0$  が得られる。

$$H_z = H_0 \text{Exp} \left( j\omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x - j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right)$$

または、実数部をとって

$$H_z = H_0 \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right) \text{Exp} \left( -\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right)$$

となる。これが、導体中の磁界分布であり、電流分布は  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$  より、

$$\begin{aligned} J_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}} H_0 \left[ \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right) - \sin \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right) \right] \text{Exp} \left( -\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right) \\ &= \sqrt{\omega\kappa\mu} H_0 \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x + \frac{\pi}{4} \right) \text{Exp} \left( -\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、電流密度または磁界が表面の値の  $1/e = 1/2.71828$  となる距離

$$S_d = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$$

を Skin Depth（浸透深さ）と呼ぶ。

（f）銅に波長 1[m]の電磁波が入射したときの表皮浸透深さを求めよ。但し、銅の導電率

$\kappa = 10^6 [s/m]$ 、透磁率  $\mu = \mu_0 [H/m]$  とする。

（解）Skin Depth は

$$S_d = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$$

で与えられ、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, \quad \kappa = 10^6$$

さらに、

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{C_0}{\lambda} = 6\pi \times \frac{10^8}{1}$$

であるから、 $S_d = 0.29 \times 10^{-5} = 2.9 [\mu m]$  となる。

### 1.3 Scalar potential $\phi$

Scalar potential  $\phi$  の有用性は『任意の Scalar potential  $\phi$  の gradient で作られる Vector  $\nabla\phi$  の rotation は常に零になる』 ことにある。すなわち、

$$\boxed{\nabla \times \nabla \phi = 0} \quad (1.1.19)$$

#### 1.3.1 Magnetic scalar potential $\phi_m$

Static な磁界系で電流が存在しない領域では  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  が成り立つ。従って、磁界  $\mathbf{H}$  を

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla \phi_m} \quad (1.1.20)$$

と定義すれば

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\nabla \times \nabla \phi_m = 0$$

が自動的に満足される。Magnetic scalar potential  $\phi_m$  を使って電流の存在しない領域の支配方程式は、(1.1.20)式を残りの条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0$$

に代入して、

$$\boxed{-\nabla \cdot \mu \nabla \phi_m = 0} \quad (1.1.21)$$

と得られる。

#### 1.3.2 Electric scalar potential $\phi_e$

Static な電界系では

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

が常に成り立つ。このため

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \phi_e} \quad (1.1.22)$$

と定義すれば

$$\nabla \times (-\nabla \phi_e) = 0$$

であるため

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

の条件が常に満足される。Electric scalar potential  $\phi_e$  を使った静電界系の支配方程式は、残

りの条件  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  に(1.1.22)式を代入して

$$\boxed{-\nabla \cdot \epsilon \nabla \phi_e = \rho} \quad (1.1.23)$$

で与えられる。他の例として、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

であるから

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \nabla \cdot \kappa \mathbf{E} = 0$$

が成り立つため、電流が分布する系では

$$-\nabla \cdot \kappa \nabla \phi_e = 0 \quad (1.1.24)$$

が支配方程式となる。

例題 [1. 1. 3]

(a) 電極間の間隔  $d$  の平行板キャパシタンスの極板間に  $\epsilon$  の誘電体があるとき、単位面積当りのキャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{\epsilon}{d}$$

で与えられることを Laplace の方程式を使って証明せよ。

(解) 下図のような座標系で考えると、 $y, z$  方向には電界が存在しないから、

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

であるから、積分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A: \quad \text{Const}$$

さらに積分して、

$$V = Ax + B$$

が得られる。さらに、

$$x = 0 \rightarrow V = V_1, \quad x = d \rightarrow V = V_2$$

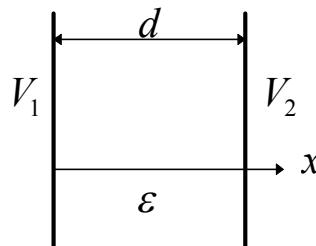
であるから、

$$V_1 = B, \quad V_2 = Ad + B$$

より、

$$V = \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1$$

となる。ところで、電界  $\mathbf{E}$  は



$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

であり、電束密度は  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  であり、表面電荷密度  $\rho [C/m^2]$  に等しいから

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \frac{V_1 - V_2}{d} = \rho$$

より、単位面積当りのキャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{\rho}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon}{d} \quad [F/m^2]$$

となる。

(b) 電荷  $Q$  が一様に分布している半径  $r$  の球外での電位  $V$  が次式で与えられる。

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

この電位  $V$  が Laplace の方程式

$$\epsilon \nabla^2 V = 0$$

を満足することを示しなさい。但し、 $\epsilon$  は誘電率である。

(解) 電位  $V$  は半径方向のみに対して変化するから、満足すべき Laplace の方程式は

$$\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \epsilon \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

となる。例題 [1. 5. 1] (d) を参照。

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon r^3}$$

であるから、代入して、

$$\epsilon \frac{2Q}{4\pi\epsilon r^3} - \epsilon \frac{2}{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = 0$$

であるから、Laplace の方程式を満足する。

## 1.4 Vector potential A

Vector potential  $A$  の有用性は『任意の Vector  $\mathbf{c}$  の rotation で作られる Vector  $\nabla \times \mathbf{c}$  の divergence は常に零となる』ことにある。すなわち、

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{c} = 0} \quad (1.1.25)$$



**1.4.1 Magnetic vector potential  $\mathbf{A}$** 

Magnetic flux density  $\mathbf{B}$  は(1.3.12)式より常に  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  でなければならない。従って

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

で Vector potential を導入すると  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  の条件が自動的に満足される。

ところで、任意の Scalar  $\varphi$  に対して  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$  が成り立つため

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \varphi \quad (1.1.26)$$

としても

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.4.12)$$

の値はおなじである。このことから Vector potential  $\mathbf{A}$  は一意的に決定できないことが解る。

$\nabla \varphi$  の大きさによって境界条件(Boundary condition)を満足するように Vector potential  $\mathbf{A}$  の基準点が変化する。従って、Vector potential を一意的に決定するためには他の拘束条件が必要であり、この拘束条件を Gauge と呼ぶ。

**1.4.2 Coulomb gauge**

Vector potential  $\mathbf{A}$  の divergence を考えると

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \varphi$$

となる。 $\varphi$  は任意の関数であるから  $\nabla^2 \varphi = -\nabla \cdot \mathbf{A}'$  を満足する  $\varphi$  を求めることができる。

このとき

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (1.1.27)$$

が成立ち、これを Coulomb gauge と呼ぶ。(1.4.12)式および(1.4.15)式の積分形で導入された Vector potential  $\mathbf{A}$  は(1.4.35)式で示されたように、この Coulomb gauge を自動的に満足する。

**1.4.3 Gauge invariance**

Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

に磁束密度  $\mathbf{B}$  と Vector potential  $\mathbf{A}$  の関係

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

を代入すると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

を積分して

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.1.28)$$

を得る。 $\phi$  は任意の Scalar function である。(1.1.28)式に(1.1.26)式を代入すると

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.1.29)$$

の関係が成り立つ。ここで

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.1.30)$$

とすれば

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi'} \quad (1.1.31)$$

を得る。従って, Vector potential を

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \phi$$

と変換した場合も Scalar potential

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

と変換した場合も磁束密度  $\mathbf{B}$  や電界  $\mathbf{E}$  に影響を与えない。これを Gauge invariance と言う。

#### 1.4.4 Lorentz gauge

(1.1.28)式

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.1.28)$$

を(1.3.6)式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E} \quad (1.3.6)$$

に代入すると

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

であるから

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)$$

を得る。整理して

$$\nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}_s \quad (1.1.32)$$

となる。ここで

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (1.1.33)$$

なる条件、すなわち Lorentz gauge を用いると、(1.1.32)式は

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_s} \quad (1.1.34)$$

が得られる。さらに(1.1.28)式の divergence を取ると

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

となり、これに(1.1.33)式を代入し

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla \cdot \nabla \phi = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

を得る。よって

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1.35)$$

が得られる。このことから、Lorentz gauge を用いることによって Vector potential  $\mathbf{A}$  と Scalar

potential  $\phi$  に対して対称な形の Wave equation が得られる。

#### **1.4.5 Vector potential equation**

(1.1.28)式と

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

の関係から

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

を得る。従って

$$\epsilon \nabla \cdot \nabla \phi + \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\rho$$

である。Coulomb gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

をこの式に適用すると

$$\epsilon \nabla \cdot \nabla \phi = -\rho$$

となり、この結果は Static な電界系の支配方程式(1.1.23)式と一致する。また、Lorentz gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

を適用すれば

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

となり、これは(1.1.35)式と一致する。

次に

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

の関係から

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \right) \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

を得る。Quasi-static な場合を仮定して

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

とすれば

$$\boxed{\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s} \quad (1.1.36)$$

となる。この式が Vector potential  $\mathbf{A}$  を用いた Static な磁界系の支配方程式である。

さらに

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$$

と(1.1.28)式

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

を用いて

$$\boxed{\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\kappa \nabla \phi} \quad (1.1.37)$$

を得る。この式は拡散方程式(Diffusion equation)であり、Quasi-static な系の支配方程式である。

また、(1.1.36)式で、変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を右辺に追加すれば、

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} = -\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \kappa \nabla \phi$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon \nabla \phi$$

を代入して

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \kappa \nabla \phi - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

を得る。整理して

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \kappa \nabla \phi + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.1.38)$$

となる。Coulomb gauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を(1.1.38)式に適用すれば

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \kappa \nabla \phi + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (1.1.39)$$

を得る。いま、自由空間を考え、 $\kappa = 0$  とすれば、(1.1.39)式は

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となり、非同次の Wave equation が得られる。

(1.1.38)式に Lorentz gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

を適用すれば

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \nabla \phi + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

または

$$\nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \nabla \phi + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

であるから

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \kappa \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = -\mu \mathbf{J}_s,$$

となり、(1.1.34)式と一致する。

#### 例題 [1. 1. 4]

(a) スカラーを  $\phi$ 、ベクトルを  $\mathbf{A}$  とするとき、次式が成り立つことを示しなさい。

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

(解)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z) \\ &= \phi \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z \\ &= \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi \end{aligned}$$

(b) スカラーを  $\phi$ 、ベクトルを  $\mathbf{A}$  とするとき、次式が成り立つことを示しなさい。

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A}$$

(解)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_y) \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_z) \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_x) \right] \mathbf{k} \\ &= \phi \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_y \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_z \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_x \right] \mathbf{k} \\ &= \phi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

(c) 二次元磁界系と軸対称磁界系におけるベクトルポテンシャルは Coulomb gauge を満足することを示しなさい。

(解)  $x, y$  二次元座標系の磁束密度は  $x, y$  の関数であり、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

より  $z$  方向のベクトルポテンシャル  $A_z$  も  $x, y$  のみの関数であり、 $z$  方向には一定値である。

従って、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

となり、Coulomb gauge が成り立つ。同様に、円筒座標系の角度方向のベクトルポテンシャル  $A_\theta$  も半径  $r$  と高さ  $z$  の関数であり、角度  $\theta$  方向には一定値であるため、Coulomb gauge を満足する。すなわち、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0$$

である。

(d) 半径  $a$  の無限に長い円筒形導体に電流密度  $J$  が断面に均一に分布して軸方向へ流れているときの磁界をベクトルポテンシャルを使って求めなさい。

(解) 例題 [1. 4. 2] (b) よりベクトルポテンシャルは電流と同じ軸方向

の成分  $A_z$  しか存在しない、また、このベクトルポテンシャルは  $z$  方向へ一定値をとるから Coulomb gauge が成り立つ。よって、円筒座標系の支配方程式は、例題 [1. 1. 1] (b) を参照して、

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J$$

となるが、角度  $\theta$  方向にたいしても  $A_z$  は一定値であるから、導体中に対して

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\mu J$$

が成り立つ。導体の外側では

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$$

が成り立つ。導体中の Poisson の方程式を満足する解の形は

$$A_z = C_1 \ln r - C_2 r^2$$

となるが、右辺第 1 項は原点  $r = 0$  で無限大となるから、 $C_1 = 0$  であり、第 2 項を

代入すると、

$$-2C_2 - 2C_2 = -\mu J$$

より、 $C_2 = \mu J / 4$  となる。従って、導体内のベクトルポテンシャルは

$$A_z = -r^2 \frac{\mu J}{4} = -\frac{\mu I}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad I = \pi a^2 J$$

となる。磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \mathbf{j}_\theta$$

となる。導体外の偏微分方程式を満足する解は

$$A_z = C_3 \ln r + C_4$$

である。 $r = a$  における磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta \Big|_{r=a} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{a} C_3 \mathbf{j}_\theta$$

となり、これは導体内の磁界

$$H \mathbf{j}_\theta \Big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{j}_\theta$$

と等しくなければならないから、 $C_3 = -\mu_0 I / (2\pi)$  となる。他方、導体内と導体

外のベクトルポテンシャルは  $r = a$  で等しいから、

$$-\frac{\mu I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a + C_4$$

が成り立つ。よって、

$$C_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln a - \frac{\mu_r}{2} \right)$$

となるから、

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln r - \ln a + \frac{\mu_r}{2} \right)$$

として、導体外のベクトルポテンシャルが求められる。従って、導体外の磁界は

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{j}_\theta$$

となる。



## 練習問題

[1]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。

[2]  $\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。

[3] 磁界系の波動方程式  $\nabla^2 \mathbf{H} + \kappa_0^2 \mathbf{H} = 0$  を導きなさい。

[4]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。

[5] 磁界系の拡散方程式  $\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。

[6]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。

[7] 電界系の波動方程式  $\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa_0^2 \mathbf{E} = 0$  を導きなさい。

[8]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。

[9] 電界系の拡散方程式  $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。

[10] 静的な磁界系の Scalar potential による支配方程式  $-\nabla \cdot \mu \nabla \phi_m = 0$  を導きなさい。

[11] 静的な電界系の Scalar potential による支配方程式  $-\nabla \cdot \varepsilon \nabla \phi_e = \rho$  を導きなさい。

[12] Gauge invariance とは何か、説明しなさい。

[13] Coulomb gauge とは何か、説明しなさい。

[14] Lorentz gauge とは何か、説明しなさい。

[15] Lorentz gauge を使って Scalar potential に関する波動方程式を導きなさい。

[16] Lorentz gauge を使って Vector potential に関する波動方程式を導きなさい。

[17]  $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}$ ,  
を導きなさい。

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\kappa \nabla \phi$$

[18] を導きなさい。

[19]円筒座標系の  $\nabla \times \mathbf{A}$  を求めなさい。

[20]球座標系  $\nabla \times \mathbf{A}$  のを求めなさい。

[21]円筒座標系における Laplace の方程式を導きなさい。

[22]球座標系における Laplace の方程式を導きなさい。

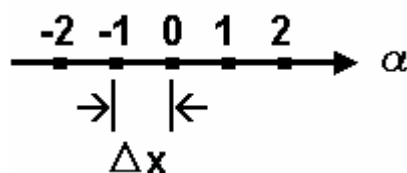
## 第2章 境界値問題と有限差分法

### 2.1 線形境界値問題

有限差分法 (Finite Difference Method, 略して FDM) は、変分原理 (Variational Principle) が登場し有限要素法 (Finite Element Method, 略して FEM) が開発される以前、偏微分方程式を数値的に解く唯一の方法であった。今日でも (形状が規則的な対象：例えば半導体など) 形状が極めて単純な問題に対して適用される。

有限差分法は、偏微分を直接、有限差分で置き換え、偏微分方程式を代数方程式に変換する方法である。偏微分が有限差分で置き換えられるためには、解は常に Taylor 級数展開可能であることを前提とし、更に差分が成り立つためには、問題空間を離散化 (Discretize) するために、一定の規則性を必要とする。離散化の観点から考えると、有限要素法は極めて自由度が高く、複雑な形状に対応できるが、有限差分法は離散化法の制約から複雑な形状に対応できないことが欠点である。さらに、有限要素法は境界条件で同次 Neumann 形境界 (対象境界条件) を変分原理で自動的に満足するが、有限差分法は自動的に同次 Neumann 条件を満足しない。これらのことから、偏微分方程式を解く手段として、有限要素法が普及するのは当然である。しかし、有限要素法は、常に変分原理、すなわち汎関数 (Functional) が存在しなければならない。これに対して、有限差分法は Functional など求める必要がなく、単に解が Taylor 級数展開可能と仮定するのみであり、Functional の存在しない問題に対して、依然として強力な数値解析技術の一方法である。

#### 2.1.1 有限差分 (Finite Difference)



(2.1.2.a) 図

(2.1.2.a) 図で、X 軸方向の偏微分  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  を原点 0 で有限差分に置き換えることを考える。

さて、 $\phi_{-2} = \phi(-2\Delta x)$ 、 $\phi_{-1} = \phi(-\Delta x)$ 、 $\phi_1 = \phi(\Delta x)$ 、 $\phi_2 = \phi(2\Delta x)$  は Taylor 級数に展開可能とすれば  $\phi_0 = \phi(0)$  として

$$\left. \begin{aligned} \phi_{-2} &= \phi_0 - 2\Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2!}(2\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots \\ \phi_{-1} &= \phi_0 - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots \\ \phi_1 &= \phi_0 + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots \\ \phi_2 &= \phi_0 + 2\Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2!}(2\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2a)$$

が得られる。

いま, (2.1.2a)式で、 $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$  の項以上が無視できるとすれば（打ち切り誤差が  $\Delta x^3$  オーダーである）

$$\phi_1 + \phi_{-1} = 2\phi_0 + 2\left(\frac{\Delta x^2}{2!}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

又は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{-1} - 2\phi_0 + \phi_1}{\Delta x^2} \quad (2.1.2b)$$

が得られる。

より高精度が必要で、 $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}$  の項以上が無視できるものとするれば

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_{-1} &= 2\phi_0 + 2\left[\frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right] + 2\left[\frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right] \\ \phi_2 + \phi_{-2} &= 2\phi_0 + 2\left[\frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right] + 2\left[\frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right] \end{aligned}$$

であるから

$$\phi_2 + \phi_{-2} - 16(\phi_1 + \phi_{-1}) = -30\phi_0 - 12(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

を得る。従って

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{-\phi_{-2} + 16\phi_{-1} - 30\phi_0 + 16\phi_1 - \phi_2}{12\Delta x^2} \quad (2.1.2c)$$

が、得られる。

以上の結果を一般化し、 $\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}$  以上の項が無視できる場合は、 $n$  個の節点に関する次の方程式

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x & \cdots & (\Delta x)^{n-1} \\ 1 & 2\Delta x & \cdots & (2\Delta x)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n\Delta x & \cdots & (n\Delta x)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial x^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (2.1.2d)$$

を解き,  $\phi_0, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots, \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial x^{n-1}}$  を求めることに帰する。(2.1.2d)式右辺の  $n \times n$  正方行列は, **Vandermonde** (ヴァンデモンデ) 型の行列であるため, 1.4 節で示したように解析的に逆行列を作ることが可能である。

このように有限差分法は任意の精度で微分が表現でき, 任意の微分を求めることができる。

### 2.1.2 境界条件(Boundary Condition)

**<a>Dirchlet 型 (固定) 境界条件** ここでは, (2.1.2.a)図の原点で,  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  を離散化した(2.1.2b)式

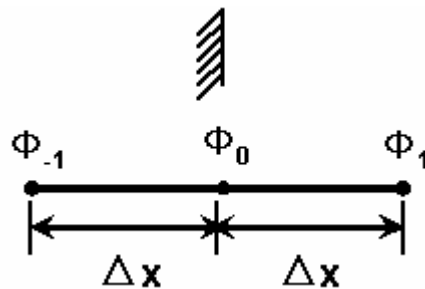
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{-1} - 2\phi_0 + \phi_1}{\Delta x^2}$$

において,  $\phi_1$  が境界値  $\phi_b$  であるとすれば, 上式に  $\phi_1 = \phi_b$  を代入し

$$\frac{\phi_{-1} - 2\phi_0 + \phi_1}{\Delta x^2} = \frac{\phi_{-1} - 2\phi_0 + \phi_b}{\Delta x^2} \quad (2.1.3a)$$

とすればよい。すなわち, Dirchlet 型境界条件は単純に境界値を対応する節点ポテンシャルに代入すればよい。これは有限要素法も全く同じである。

**<b>Neumann 型境界条件** ここでは, (2.1.3a)図の原点で同次 Neumann 型 (対象)



(2.1.3a)図

境界条件を導入することを考えよう。同次 Neumann 条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.1.3b)$$

が、これは(2.1.2.a)式より

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\lambda=0} \cong \phi_1 - \phi_{-1} = 0 \quad (2.1.3c)$$

と、 $\Delta x^3$  オーダーの打ち切り誤差で近似できるから

$$\phi_{-1} = \phi_1 \quad (2.1.3d)$$

とすればよいことを意味する。従って、(2.1.2b)式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_{-1}}{\Delta x^2} = \frac{2(\phi_1 - \phi_0)}{\Delta x^2} \quad (2.1.3e)$$

となる。

同様にして、(2.1.2c)式に対しては

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{-1} = \phi_1 \\ \phi_{-2} = \phi_2 \end{array} \right\} \quad (2.1.3f)$$

と置くことによって

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{-\phi_{-2} + 16\phi_{-1} - 30\phi_0 + 16\phi_1 - \phi_2}{12\Delta x^2} \\ &= \frac{-\phi_2 + 16\phi_1 - 30\phi_0}{6\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.1.3g)$$

として、同次 Neumann 型境界条件が満足される。

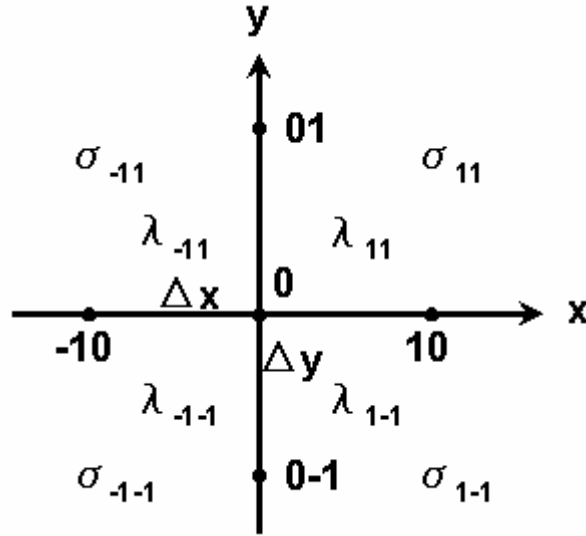
### 2.1.3 Laplace and Poisson Equations

#### <a>基礎方程式

$\phi$  を Potential,  $\lambda$  を媒質のパラメータ, さらに,  $s$  を Source Density として, 解くべき支配方程式を

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -s \quad (2.1.4a)$$

とする。



(2.1.4a)図

(2.1.4a)式を(2.1.4a)図の原点 0 について，有限差分法で離散化すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\lambda_{10} \frac{\phi_{-10} - \phi_0}{\Delta x} - \lambda_{-10} \frac{\phi_0 - \phi_{-10}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ \text{ここで, } \lambda_{10} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{1-1}) \\ \lambda_{-10} &= \frac{1}{2}(\lambda_{-11} + \lambda_{-1-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4b)$$

と近似でき，さらに

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\lambda_{01} \frac{\phi_{01} - \phi_0}{\Delta y} - \lambda_{0-1} \frac{\phi_0 - \phi_{0-1}}{\Delta y}}{\Delta y} \\ \lambda_{01} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{-11}) \\ \lambda_{0-1} &= \frac{1}{2}(\lambda_{1-1} + \lambda_{-1-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4c)$$

と近似できるとすれば，(2.1.4a)式に(2.1.4b)式と(2.1.4c)式を代入して

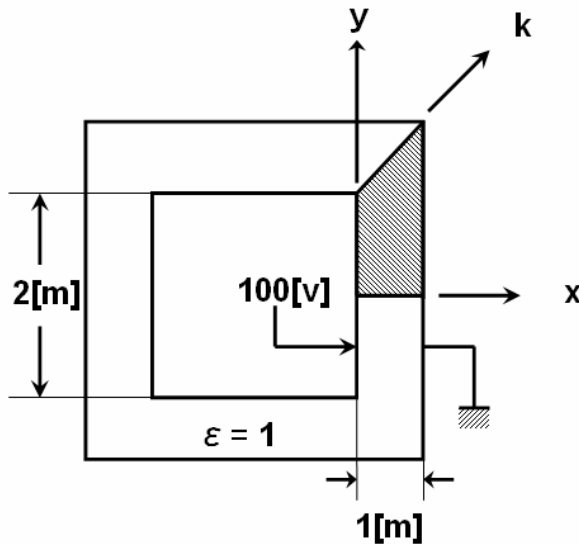
$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{\lambda_{11} + \lambda_{1-1}}{2\Delta x^2} \phi_{10} + \frac{\lambda_{-11} + \lambda_{-1-1}}{2\Delta x^2} \phi_{-10} + \frac{\lambda_{11} + \lambda_{-11}}{2\Delta y^2} \phi_{01} + \frac{\lambda_{1-1} + \lambda_{-1-1}}{2\Delta y^2} \phi_{0-1} \\
& = \left( \frac{\lambda_{11} + \lambda_{1-1}}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{-11} + \lambda_{-1-1}}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{11} + \lambda_{-11}}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{1-1} + \lambda_{-1-1}}{2\Delta x^2} \right) \phi_0 \\
& = -\frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{1-1} + \sigma_{-11} + \sigma_{-1-1}) \\
& \text{又は,} \\
& \frac{\Delta y}{2\Delta x}(\lambda_{11} + \lambda_{1-1})\phi_{10} + \frac{\Delta y}{2\Delta x}(\lambda_{-11} + \lambda_{-1-1})\phi_{-10} + \frac{\Delta x}{2\Delta y}(\lambda_{11} + \lambda_{-11})\phi_{01} \\
& \quad + \frac{\Delta x}{2\Delta y}(\lambda_{1-1} + \lambda_{-1-1})\phi_{0-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y}\right)(\lambda_{11} + \lambda_{1-1} + \lambda_{-11} + \lambda_{-1-1})\phi_0 \\
& = -\frac{\Delta x \Delta y}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{1-1} + \sigma_{-11} + \sigma_{-1-1})
\end{aligned} \right\} \quad (2.1.4d)
\end{aligned}$$

を得る。簡単のため、 $\Delta x = \Delta y = \Delta h$  とすれば

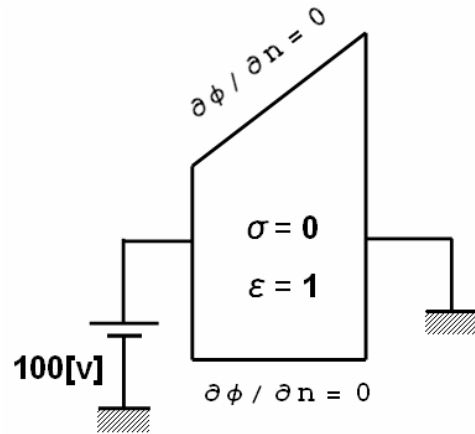
$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{11} + \lambda_{1-1}}{2} \phi_{10} + \frac{\lambda_{-11} + \lambda_{-1-1}}{2} \phi_{-10} + \frac{\lambda_{11} + \lambda_{-11}}{2} \phi_{01} + \frac{\lambda_{1-1} + \lambda_{-1-1}}{2} \phi_{0-1} - (\lambda_{11} + \lambda_{1-1} + \lambda_{-11} + \lambda_{-1-1})\phi_0 \\
& = -\frac{\lambda^2}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{1-1} + \sigma_{-11} + \sigma_{-1-1})
\end{aligned} \quad (2.1.4e)$$

となる。

<b>例題



(2.1.4b)図



(2.1.4c)図

□) **Laplace 問題** ; 具体的な例題として、(2.1.4b)図に示す同軸角形導体間の静

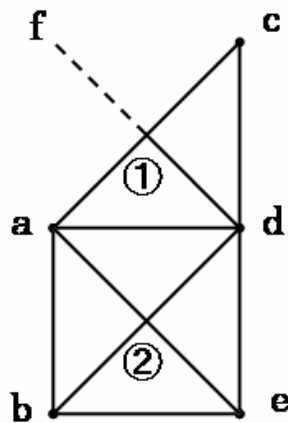


電界分布を計算する。(3.1.4b)図で X 軸と K 軸に沿って  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  の Homogeneous

Neumann 条件が成り立つから、問題対象領域は、(3.1.4c)図となる。この系の支配方程式は

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon \nabla^2 \phi = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \right\} \quad (2.1.4f)$$

である。



(2.1.4d)図

空間の離散化を(2.1.4d)図のように行えば、 $\Delta x = \Delta y$  であるから、節点□に対して

$$\phi_a + \phi_c + \phi_d + \phi_f - 4\phi_1 = 0$$

が成り立ち、さらに  $\phi_a = 100$ ,  $\phi_c = 0$ ,  $\phi_d = \phi_f = 0$  (同次 Neumann 条件)を代入して

$$100 - 4\phi_1 = 0 \rightarrow \phi_1 = 25[\text{V}]$$

を得る。同様にして、接点□においては

$$200 - 4\phi_2 = 0 \rightarrow \phi_2 = 50[\text{V}]$$

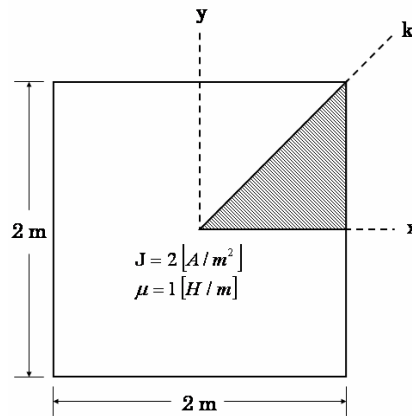
が得られる。この結果は、三角形一次要素を使った従来の有限要素法や Voronoi-Delaunay 法の Primal 系の結果と一致する。

#### □) Poisson 問題

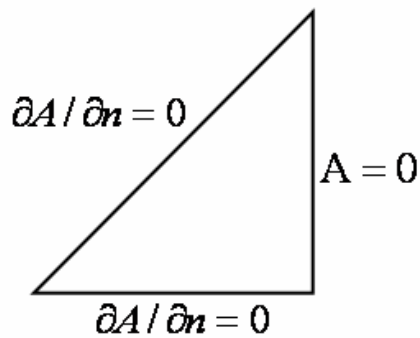
具体的な例として、(2.1.4.e)図に示す角形磁性体に電流密度  $J$  が一様に分布して流れている二次元問題を考える。問題の対称性から計算対象領域は(2.1.4.f)図に示す 1/8 の領域となる。

いま、(2.1.4f)図が、(2.1.4g)図のように離散化されたとする。この問題の支配方程式は

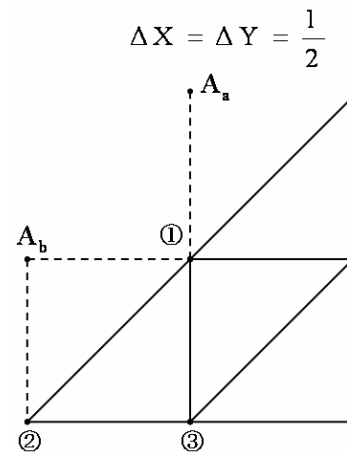
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mathbf{J} \\ \mu &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4g)$$



(2.1.4e)図



(2.1.4f)図



(2.1.4g)図

の Poisson 方程式である。(2.1.4f)図の問題対象領域が(2.1.4g)図のように離散化されたとする。このとき、接点□に対して、(2.1.4e)式より

$$\mathbf{A}_a + \mathbf{A}_b + 0 + \mathbf{A}_3 + 4\mathbf{A}_1 = -\frac{1}{2}$$

が成り立ち、 $A_a = 0$ 、 $A_b = A_3$  の条件（同次 Neumann 条件）より

$$2\mathbf{A}_3 + 4\mathbf{A}_1 = -\frac{1}{2}$$

又は,

$$-\mathbf{A}_3 + 2\mathbf{A}_1 = \frac{1}{4}$$

が得られる。同様にして、接点□に対して

$$2\mathbf{A}_3 + 2\mathbf{A}_b - 4\mathbf{A}_2 = -\frac{1}{2}$$

が成り立ち、これに、 $\mathbf{A}_b = \mathbf{A}_3$ を代入すれば

$$-\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 = \frac{1}{8}$$

を得る。接点□においても同様に

$$2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_3 = -\frac{1}{2}$$

又は,

$$-2\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + 4\mathbf{A}_3 = \frac{1}{2}$$

を得る。全体をまとめて

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

より

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = [0.344, 0.563, 0.438]$$

を得る。

## 第3章 有限要素法入門

### 3.1 概要

本章では電磁界の数値解析法で最も応用範囲の広い有限要素法について述べる。その主要内容は以下のとおりである。

#### 3.1.1 概要

#### 3.1.2 変分原理

- Laplace と Poisson の方程式
- 拡散方程式と波動方程式
- Energy Functiona

#### 3.1.3 三角形一次有限要素

- 基礎的な考え方
- 内挿関数
- 汎関数
- 全体の汎関数
- システム方程式
- 境界条件
- Laplace の方程式の例題
- Poisson の方程式の例題
- 拡散方程式の例題
- 波動方程式の例題
- 双対映像法による開領域問題の有限要素解

#### 3.1.4 双反変分原理

- Laplace と Poisson の方程式
- 拡散方程式と波動方程式
- Energy Functional

#### 3.1.5 Voronoi-Delaunay の離散化法

- Voronoi-Delaunay 線図
- 局所直交座標系
- 内挿関数
- 局所システム方程式
- 全体のシステム方程式
- 境界条件
- Laplace の方程式の例題

- Poisson の方程式の例題
- 拡散方程式の例題
- 波動方程式の例題
- 収束性
- Voronoi-Delaunau 変換

### 3.6 まとめ

## 3.2 変分原理

### 3.2.1 Laplace と Poisson の方程式

Laplace と Poisson の方程式の違いは同次方程式か非同次方程式かにある。従って、ここでは非同次方程式である Poisson の方程式

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma \quad (3.2.1)$$

について考える。(3.2.1) 式で

$\lambda$  : Medium parameter

$\phi$  : Potential

$\sigma$  ; Source density

である。

次の変分原理を考える。

変分原理 :  $\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma$  の解は汎関数 〈Functional〉

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S [\lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma] ds$$

を最小にすることで与えられる。

いま、(3.2.1) 式の近似解を

$$\psi = \phi + \varepsilon v \quad (3.2.2)$$

とする。(3.2.2) 式で

$\psi$  : 近似解

$\phi$  : 真の解

$\varepsilon$  : 数値パラメータ

$v$  : 微分可能な任意の関数

である。(3.2.2) 式の近似解を汎関数  $F(\phi)$  に代入して

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \frac{1}{2} \int_S \left\{ \lambda [\nabla(\phi + \varepsilon v)]^2 - 2(\phi + \varepsilon v) \sigma \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left\{ \lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \right\} ds + \varepsilon \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_S \lambda [\nabla v]^2 ds \\ &= F(\phi) + \varepsilon \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_S \lambda [\nabla v]^2 ds \end{aligned} \quad (3.2.3.)$$

を得る。(3.2.3) 式の第一変分  $\delta F=0$  を求めると、第一変分は

$$\delta F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\nabla\phi + \varepsilon v) - F(\phi)}{\varepsilon} \right\} \quad (3.2.4)$$

で定義されるから

$$\begin{aligned} \delta F &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_S \varepsilon [\lambda \nabla\phi \cdot \nabla v - v\sigma] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_S \lambda [\nabla v]^2 ds}{\varepsilon} \\ &= \int_S [\lambda \nabla\phi \cdot \nabla v - v\sigma] ds = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

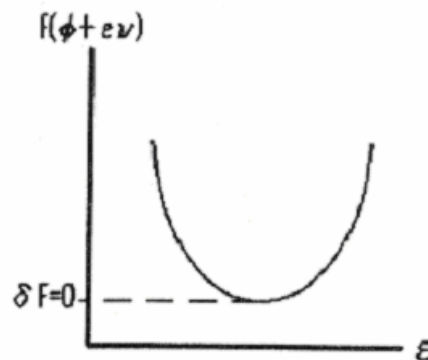


図 3.2.1

関数  $F(\phi + \varepsilon v)$  は  $\varepsilon$  に対して二次関数であり、 $\varepsilon^2$  の係数は常に正である。従って、第一変分  $\delta F=0$  の極値 (Extremum) は汎関数  $F(\phi + \varepsilon v)$  の最小値を意味する。

(3.2.5) 式を変形するために次の Green の定理を考える。

Green の定理  $\int_V \nabla \cdot (v \nabla \phi) dv = \int_S v \nabla \phi \cdot ds$  : Gauss の法則

または

$$\int_V (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) dv = \int_S v \nabla \phi \cdot ds \quad (3.2.6)$$

$$\therefore \nabla \cdot (v \nabla \phi) = \nabla v \cdot \nabla \phi + v \nabla^2 \phi$$

Green の定理の二次元形は

$$\int_S (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) ds = \int_C v \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} \quad (3.2.7)$$

であるから、(4.2.5) 式は

$$\int_S (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) ds = - \int_S v (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) ds + \int_C \lambda v (\partial \phi / \partial n) \cdot d\mathbf{l} \quad (3.2.8)$$

となる。よって、

$$\delta F = - \int_S v (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) ds + \int_c \lambda v (\partial \phi / \partial n) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.2.9)$$

を意味し、結局

$$\lambda \nabla^2 \phi + \sigma = 0$$

と

$$\partial \phi / \partial n = 0$$

を同時に満足する。 $\partial \phi / \partial n = 0$  は境界の法線方向  $n$  への Potential  $\phi$  の変化率が零であることを意味し、同時 Neumann 条件 (Homogeneous Neumann condition)、または対称境界条件 (Symmetrical boundary condition) と呼ばれる。

### 3.2.2 拡散方程式と波動方程式

拡散方程式 (Diffusion equation) と波動方程式 (Wave equation) の違いは時間の一階微分か二階微分かである。ここでは次の Helmholtz の方程式を考える。

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma \quad (3.2.10) \quad \text{式で}$$

$\lambda$  : Medium parameter

$\phi$  : Potential

$\omega$  :  $\partial^2 / \partial t^2$  or  $\partial / \partial t$

$\sigma$  : Source density

である。

(3.2.10) 式を解くために次の変分原理を考える。

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma \text{ の解は次の汎関数}$$

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S [\lambda (\nabla \phi)^2 - \omega \phi^2 - 2\phi \sigma] ds$$

を最小にすることで与えられる。

いま (3.2.10) 式の近似解を

$$\psi = \phi + \varepsilon v$$

とする。この近似解を汎関数  $F(\phi)$  に代入して、



$$\begin{aligned}
F(\psi) &= \frac{1}{2} \int_S \left\{ \left[ \nabla(\phi + \varepsilon v) \right]^2 - \omega(\phi + \varepsilon v)^2 - 2(\phi + \varepsilon v)\sigma \right\} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_S \left[ \lambda(\nabla\phi)^2 - \omega\phi^2 - 2\phi\sigma \right] ds + \\
&\quad + \varepsilon \int_S \left[ \lambda\nabla\phi \cdot \nabla v - \omega\phi v - v\sigma \right] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_S \left[ \lambda(\nabla v)^2 - \omega v^2 \right] ds \\
&= F(\phi) + \varepsilon \int_S \left[ \lambda\nabla\phi \cdot \nabla v - \omega\phi v - v\sigma \right] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_S \left[ \lambda(\nabla v)^2 - \omega v^2 \right] ds
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

を得る。(3.2.11) 式より第一変分  $\delta F=0$  を求めると

$$\begin{aligned}
\delta F &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\phi + \varepsilon v) - F(\phi)}{\varepsilon} \\
&= \int_S \left[ \lambda\nabla\phi \cdot \nabla v - \omega\phi v - v\sigma \right] ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから、二次元の Green の定理

$$\int_S \nabla\phi \cdot \nabla v ds = - \int_S v \nabla^2 \phi ds + \int_c v (\partial\phi / \partial n) \cdot d\mathbf{l}$$

を用いて

$$\delta F = - \int_S v \left[ \lambda \nabla^2 \phi + \omega\phi + \sigma \right] ds + \int_c \lambda v (\partial\phi / \partial n) \cdot d\mathbf{l} \tag{3.2.12}$$

となる。従って、(3.2.11) 式の右辺第三項で

$$\lambda(\nabla v)^2 - \omega v^2 > 0 \tag{3.2.13}$$

である限り、第一変分  $\delta F=0$  を取ることによって得られる極値は最小値となり

$$\int_S v \left[ \lambda \nabla^2 \phi + \omega\phi + \sigma \right] ds = 0 \tag{3.2.14}$$

$$\int_c \lambda v \left( \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{3.2.15}$$

を意味し、(3.2.10) 式の解が求められることとなる。

(3.2.13) 式の実例を例について吟味してみる。要は  $\omega$  の符号が負であれば (3.2.13) 式は常に成り立つこととなる。拡散型の例として、Quasi-static な磁界系を考える。

$$\nabla^2 H - \kappa\mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

であり、

$$\omega = -\kappa\mu \frac{\partial}{\partial t}$$

であるため、(3.2.13) 式の関係が満足される。電界系に対しても

$$\nabla^2 E - \epsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

であるため、(4.2.13) 式が成り立つ。次の波動方程式の例として TE mode を考えると

$$\nabla^2 H - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

であるため

$$\omega = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

であるから、(4.2.13) 式は満足される。TM mode においても

$$\nabla^2 E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

であるため、(3.2.12) 式が成り立つ

以上のように実際の電磁界では大部分 (3.2.13.) 式の関係が満足されるため、汎関数  $F(\phi + \epsilon\psi)$  の最小値を求めることによって拡散方程式や波動方程式の解が得られる。

### 3.2.3. Energy functional

<a>Laplace と Poisson の方程式 静電界系の例を考えると

$\phi$  : Scalar potential

$\lambda$  : 誘電率  $\epsilon$

$\sigma$  : 電荷密度  $\rho$

に対応するから、支配方程式は

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla \phi = -\rho$$

となる。このときの電界と電束密度は

$$E = -\nabla \phi$$

$$D = \epsilon E$$

$$= -\epsilon \nabla \phi$$

である。従ってこの場合の汎関数  $F(\phi)$  は

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \frac{1}{2} \int_s \left[ \epsilon (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s \left[ \epsilon E^2 - 2\phi \sigma \right] ds \end{aligned}$$

となり、明らかに静電界の Energy となる

静磁界系の例を考えると

$\phi$  : Vector potential の一成分  $A_z$

$\lambda$  : 透磁率の逆数 ( $1/\mu$ )

$\sigma$  : 電流密度の一成分  $J_z$

と対応する。

このときの支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z = -J_z$$

であり、磁束密度と磁界は、 $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  をそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の単位ベクトルとして

$$\mathbf{B} = \nabla \times A_z \mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j}$$

で与えられる。さらに磁束密度と磁界による Energy は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} ds &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j} \right] \cdot \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j} \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} (\nabla A_z)^2 ds \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

となる。従って、Functional  $F(A_z)$  は

$$\begin{aligned} F(A_z) &= \frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{1}{\mu} (\nabla A_z)^2 - 2 A_z J_z \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} B^2 ds - \int_S A_z J_z ds \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

と書ける。(3.2.16)式は明らかに静磁界系の Energy を表している。

<b>拡散方程式と波動方程式</b> Quasi- static な磁界系を考える。各パラメータは

$\phi$  : Vector potential の一成分  $A_z$

$\lambda$  : 透磁率の逆数( $1/\mu$ )

$\sigma$  : 電流密度の一成分  $J_z$

$\omega$  : 導電率と時間の一階微分- $\kappa$  ( $\partial/\partial t$ )

にそれぞれ対応する。また、支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z - \kappa \frac{\partial A_z}{\partial t} = J_z \quad (3.2.17)$$

である。この場合の汎関数  $F(A_z)$  は

$$\begin{aligned} F(A_z) &= \frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{1}{\mu} (\nabla A_z)^2 + \kappa \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) A_z - 2 A_z \cdot J_z \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left[ (1/\mu) B^2 + J_e \cdot A_z - 2 A_z \cdot J_z \right] ds \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

となる。

ここで、渦電流密度 (Eddy current density) を

$$J_e = \kappa \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \quad (3.2.19)$$

としている。

(3.2.18) 式で、右辺第一項は系に蓄えられる磁気エネルギー、第二項は渦電流による損失エネルギー、そして最後の項は入力エネルギーに対応する。

次に波動方程式の例として、Scalar potential  $\phi$  で表される Dynamic な系を考える。この場合のパラメータは

$\phi$  : Scalar potential

$\lambda$  : 誘電率  $\epsilon$

$\omega$  :  $-\mu\epsilon^2$  ( $\partial^2/\partial t^2$ )

$\sigma$  : 電荷密度  $\rho$

にそれぞれ対応し、支配方程式は

$$\epsilon \nabla^2 \phi - \mu \epsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\rho \quad (3.2.20)$$

となる。

これは Scalar potential  $\phi$  で表された波動方程式であり、この方程式に対応する汎関数  $F(\phi)$  は

$$\begin{aligned}
 F\phi &= \frac{1}{2} \int_s \left[ \varepsilon (\nabla \phi)^2 + \mu \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - 2\phi \rho \right] ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_s \left[ \varepsilon (E^2) + \mu \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - 2\phi \rho \right] ds
 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

となる。

従って、右辺第一項は系に蓄えられる電界エネルギー、第二項は波動で伝播するエネルギー、そして最後の項は入力エネルギーにそれぞれ対応する。

汎関数は一般にエネルギーに対応し、汎関数の最小値を求める第一変分はエネルギーを最小化することに他ならない。このように汎関数またはエネルギーの極値を求めることで得られる解を弱型式の解 (Weak solution) と呼ぶ。

## 練習問題

- [1] Laplace の方程式に対する汎関数を書きなさい。
- [2] Laplace の方程式に対する汎関数を最小にすることで導かれる関係を述べなさい。
- [3.] 入力境界条件で決まる拡散方程式の汎関数を書きなさい。
- [4] 拡散方程式に対する汎関数を最小にすることで導かれる関係を述べなさい。
- [5] 同次形の波動方程式に対する汎関数を書きなさい。
- [6] 波動方程式に対する汎関数を最小にすることで導かれる関係を述べなさい。
- [7] Green の定理を証明しなさい。
- [8] 静的な磁界系の汎関数が磁気エネルギーに対応することを示しなさい。
- [9] Quasi-static な電界系の汎関数が電界エネルギーに対応することを示しなさい。
- [10] 弱型式の解とは何か、説明しなさい。

### 3.3 三角形一次有限要素 (First order triangular finite elements)

#### 3.3.1 基礎的な考え方

偏微分方程式を変分原理に基づいて解くには、エネルギーに対応する汎関数 (Functional) を求め、この汎関数に近似解を代入し、汎関数の第一変分  $\delta F=0$  を取り、システム方程式を導き、得られたシステム方程式を解き、偏微分方程式の解を得ることとなる。

ここでは、偏微分方程式が支配する空間が二次元であり、二次元空間を三角形要素 (Triangular finite elements) に分解し、この三角形要素内で一次 Lagrange 型の補間関数 (Interpolating function) を近似解として使用する三角形一次要素を用いた有限要素法について述べる。具体的な手順は以下の通りである。

- 問題空間を三角形要素で離散化する。
- 各三角形要素内で近似解を仮定する。
- 各三角形要素の汎関数を求める。
- 要素の接合条件から全体の汎関数を得る。
- 第一変分  $\delta F=0$  を取りシステム方程式を導く。
- 境界条件 (Boundary condition) を入れてシステム方程式を解く。

#### 3.3.2 内挿関数 (Interpolating function)

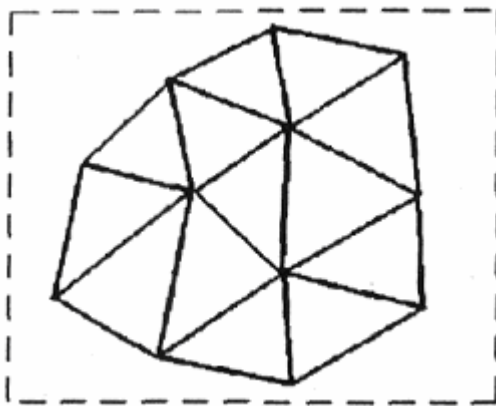


図 3.3.1

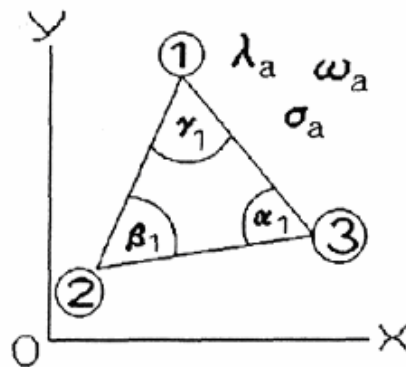


図 3.3.2

支配方程式として、次式の Helmholtz 型を考える。

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma$$

この方程式に支配される空間が図 3.3.1 のように三角形に離散化されたとき、ある任意の三角形に対して図 3.3.2 に示す局所座標を仮定する。この三角形の中で近似解は

$$\psi = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (3.3.1)$$

と座標の一次関数で表されるものとする。

三角形の各頂点における Potential を  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  とすれば、

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_{21} \\ 1 & x_3 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

が成り立つ。(3.3.2) 式の関係を用いて (3.3.1) 式を書き直すと

$$\begin{aligned} \psi &= (1 \quad x \quad y) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a \end{bmatrix} \\ &= (1 \quad x \quad y) \left( \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_{21} \\ 1 & x_3 & x_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.3.3.)$$

となる。(3.3.3.) 式は

$$\psi = \sum_{i=1}^3 \psi_i a_i \quad (3.4.5)$$

但し、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\Delta_a} \left[ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \right] \\ a_2 &= \frac{1}{2\Delta_a} \left[ (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right] \\ a_3 &= \frac{1}{2\Delta_a} \left[ (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \right] \end{aligned}$$

$\Delta_a$  : 三角形の面積

と書くことが出来る。

### 3.3.3 汎関数

Helmholtz の方程式に対する汎関数は

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \left[ \int_s \lambda (\nabla \psi)^2 - \omega \psi^2 - 2\psi \sigma \right] ds$$

で与えられるから、

$$\nabla \psi = \sum_{i=1}^3 \psi_i \nabla_{ai}$$

の関係を用いて、



$$\begin{aligned}
F_a(\psi) &= \frac{\lambda_a}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \psi_i \left[ \int_S \nabla a_i \cdot \nabla a_j ds \right] \psi_j \\
&\quad - \frac{\omega_a}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \psi_i \psi_j \int_S a_i a_j ds - \sum_{i=1}^3 \psi_i \int_S a_i \sigma_a ds \\
&= \frac{1}{2} \Psi_a^T [S_a - T_a] \Psi_a - \Psi_a^T U_a
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

の関係を得る。ここで、

$$\Psi_a = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3]^T$$

$$U_a = \frac{\Delta_a}{3} \sigma_a [1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$S_a = \frac{\lambda_a}{2} \begin{bmatrix} \cot \alpha_1 + \cot \beta_1 & -\cot \alpha_1 & -\cot \beta_1 \\ -\cot \alpha_1 & \cot \alpha_1 + \cot \gamma_1 & -\cot \gamma_1 \\ -\cot \beta_1 & -\cot \gamma_1 & \cot \beta_1 + \cot \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$T_a = \omega_a \left( \frac{\Delta_a}{12} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_a$  : 三角形の面積

### 3.3.4 全体の汎関数

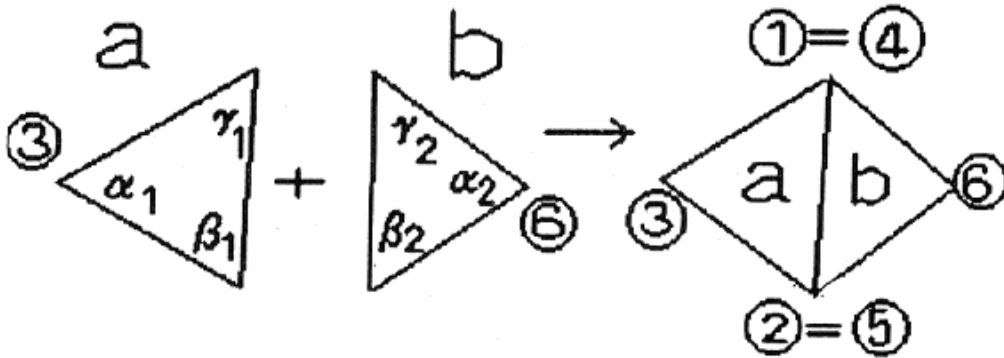


図 3.3.3

いま Helmholtz の方程式によって支配される空間が、領域 a と b の三角形要素に分割され、図 3.3.3 のように節点 1 と 4 さらに 2 と 5 が両領域に共通となっている場合の全体の汎関数を求める。

各要素に対する汎関数は

$$F_a(\psi) = \frac{1}{2} \Psi_a^T [S_a - T_a] \Psi_a - \Psi_a^T U_a$$

$$F_b(\psi) = \frac{1}{2} \Psi_b^T [S_b - T_b] \Psi_b - \Psi_b^T U_b$$

と書けるから、両者を纏めてかくと

$$\begin{pmatrix} F_a(\psi) \\ F_b(\psi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [\Psi_a \ \Psi_b]^T \left[ \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & T_b \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} - [\Psi_a \ \Psi_b] \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

となる。ここで

$$\psi_1 = \psi_4$$

$$\psi_2 = \psi_5$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = C \Psi \quad (3.3.7)$$

が成り立つ。従って、接続行列 (Connection matrix)  $C$  を用いて、全体の汎関数  $F(\psi)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \frac{1}{2} [C\Psi]^T \left[ \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & T_b \end{pmatrix} \right] [C\Psi] - [C\Psi]^T \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \Psi^T \left[ C^T \left[ \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & T_b \end{pmatrix} \right] C \right] \Psi - \Psi^T \left[ C^T \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \Psi^T [S - T] \Psi - \Psi^T U \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

ここで、

$$U = C^T \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} = \frac{\Delta_a \sigma_a}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta_b \sigma_b}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
S &= C^T \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_b \end{pmatrix} C \\
&= \frac{\lambda_a}{2} \begin{pmatrix} \cot \alpha_1 + \cot \beta_1 & -\cot \alpha_1 & -\cot \beta_1 & 0 \\ -\cot \alpha_1 & \cot \alpha_1 + \cot \gamma_1 & -\cot \gamma_1 & 0 \\ -\cot \beta_1 & -\cot \gamma_1 & \cot \beta_1 + \cot \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\lambda_b}{2} \begin{pmatrix} \cot \alpha_2 + \cot \beta_2 & -\cot \alpha_2 & 0 & -\cot \beta_2 \\ -\cot \alpha_2 & \cot \alpha_2 + \cot \gamma_2 & 0 & -\cot \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cot \beta_2 & -\cot \gamma_2 & 0 & \cot \beta_2 + \cot \gamma_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$T = C^T \begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & T_b \end{pmatrix} C = \frac{\omega_a \Delta_a}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_b \Delta_b}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

以上の結果から、ベクトル  $U$  は共通となる節点の要素を単純に加えることで計算でき、行列  $S$  及び  $T$  は両方の要素に共通となる節点要素を単純に加え、共通となる三角形の辺に対応する要素も単純に加えればよいこととなる。

### 3.3.5 システム方程式

全体の汎関数が (4.3.8) 式によって求められたので、汎関数の最小値を求めることによってシステム方程式を導く。

行列の微分公式

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\mathbf{X}} [\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}] &= \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} \\
\frac{d}{d\mathbf{X}} [\mathbf{X}^T \mathbf{b}] &= \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

を使って、(3.3.8) 式を微分し

$$\begin{aligned}
\frac{dF(\psi)}{d\Psi} &= \frac{d}{d\Psi} \left\{ \frac{1}{2} \Psi^T [S - T] \Psi - \Psi^T U \right\} \\
&= \frac{1}{2} [S - T] \Psi + \frac{1}{2} [S - T]^T \Psi - U \\
&= [S - T] \Psi - U \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

を得る。よって、システム方程式は

$$[S - T]\Psi = U \quad (3.3.11)$$

となる。

### 3.3.6 境界条件

Helmholtz 型の方程式

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma$$

の汎関数は

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_S [\lambda (\nabla \psi)^2 - \omega \psi^2 - 2\psi \sigma] ds$$

で与えられた。そして、その第一変分  $\delta F = 0$ ，すなわち最小値を求める演算は

$$\int_S v [\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi + \sigma] ds = 0$$

$$\int_c \lambda v \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

を意味した。これは、Helmholtz の方程式が問題空間全体として満足されることと対称境界条件  $\partial \phi / \partial n = 0$  が自動的に満足されることを示している。従って、境界条件の中で、対称境界条件は考慮する必要なく、(3.3.11) 式に導入すべき境界条件は Potential  $\phi$  が各節点で特定の値を取る固定境界条件(Dirichlet type boundary condition)である。

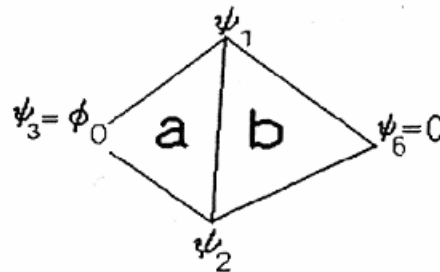


図 4.4.5

具体的な例として、図 3.4.5 に示すように (3.3.11) 式のシステム方程式の境界条件が与えられたとする。

すなわち

$\psi_1$  : 対称境界上の Potential

$\psi_1$  : 対称境界上の Potential

$\psi_3 = \phi_0$  : 固定境界条件

$\psi_6 = 0$  : 固定境界条件

である。このとき解ベクトルは

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \phi_0 \quad 0]^T \quad (3.3.12)$$

となり、求めるべき Potential は  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  のみとなる。従って、解くべきシステム方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_a (\cot \alpha_1 + \cot \beta_1) + \lambda_b (\cot \alpha_2 + \cot \beta_2) & -\lambda_a \cot \alpha_1 - \lambda_b \cot \alpha_2 \\ -\lambda_a \cot \alpha_1 - \lambda_b \cot \alpha_2 & \lambda_a (\cot \alpha_1 + \cot \gamma_1) + \lambda_b (\cot \alpha_2 + \cot \gamma_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2(\omega_a \Delta_a + \omega_b \Delta_b) & \omega_a \Delta_a + \omega_b \Delta_b \\ \omega_a \Delta_a + \omega_b \Delta_b & 2(\omega_a \Delta_a + \omega_b \Delta_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \Delta_a \sigma_a + \Delta_b \sigma_b \\ \Delta_a \sigma_a + \Delta_b \sigma_b \end{bmatrix} + \phi_0 \begin{bmatrix} \frac{\lambda_a}{2} \\ \frac{\lambda_b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cot \beta_1 \\ \cot \gamma_1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} \frac{\lambda_b}{2} \\ \frac{\lambda_b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cot \beta_1 \\ \cot \gamma_1 \end{bmatrix} \\ & + \phi_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_a \Delta_a \\ \omega_b \Delta_b \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_a \Delta_a \\ \omega_b \Delta_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

(3.3.12) 式を解くことによって Potential,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  が求まり、結局 Helmholtz の方程式の解が得られる。

### 3.3.7 Laplace の方程式の例題

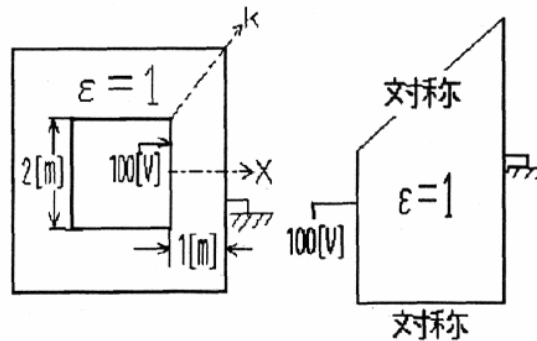


図 3.3.5

具体的な例として、図 4.3.5 に示す同軸角型導体間の静電界分布を計算する。

図 3.3.5 で X 軸と k 軸に沿って  $\partial\phi/\partial n = 0$  の対称境界条件が成り立つから、解くべき問題領域は同図右側の領域となる。この系の支配方程式は

$$\epsilon \nabla^2 \phi = 0 \quad (3.3.13)$$

であり、図 3.3.6 に示すように 6 個の直角二等辺三角形に分割されたとする。

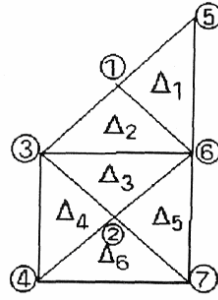


図 3.3.6

この場合の固定境界条件は

$$\phi_3 = \phi_4 = 100$$

$$\phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = 0$$

で与えられる。

システム方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta_2 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right] + \\ & + \left[ \begin{array}{c} \Delta_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta_5 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Delta_6 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{pmatrix} \\ & = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

または、

$$S\Psi = U$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

となる。(3.3.14) 式に固定境界条件

$$\phi_3 = \phi_4 = 100$$

$$\phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = 0$$

を代入し変形すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \end{pmatrix} \quad (3.3.15)$$

(3.3.15) 式より  $\phi_1=25$ 、 $\phi_2=50$  を得る。従って、(3.3.14) 式の Potential ベクトル  $\Psi$  は

$$\Psi = [25 \ 50 \ 100 \ 100 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

となる。この解ベクトルから汎関数を求めると

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \Psi^T S \Psi = 6875 [\text{J/m}] \quad (3.3.16)$$

となる。このエネルギーは図 3.3.5 全体の  $1/8$  であるから、8 倍して

$$\frac{1}{2} C (100 - 0)^2 = 8 \times 6875 [\text{J/m}] \quad (3.3.17)$$

より、キャパシタンスは  $C=11[\text{F/m}]$  となる。この場合の汎関数は図 3.3.5 の内側と外側間に蓄えられる電界 エネルギーに等しく、この電界エネルギーは Capacitance  $C$  に蓄えられるエネルギーに等しい。尚、この系の解析解による厳密な解による Capacitance は  $C=10.2[\text{F/m}]$  であり、有限要素法による Capacitance は大きめの（上限）値を与えることがわかる。

## 3.3.8 Poisson の方程式の例題

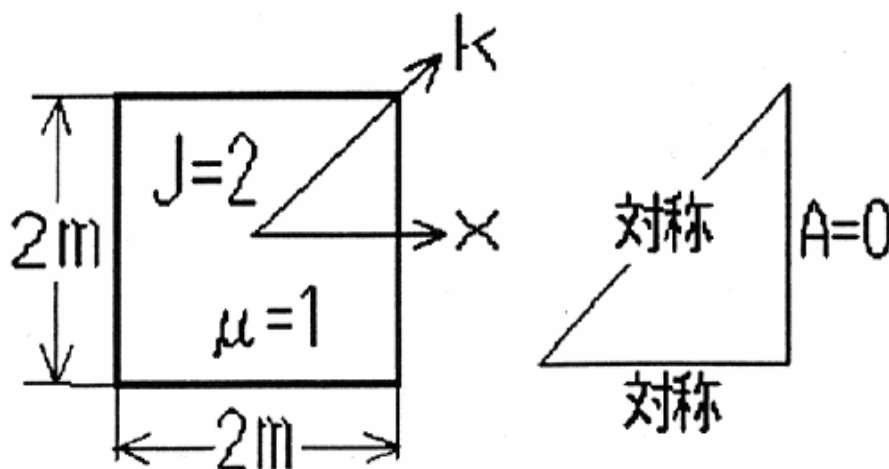


図 3.3.7

具体的な例として、図 3.3.7 に示す角型強磁性体中に電流が均一に分布して流れている場合の静磁界分布を計算する。線分  $k$  と  $x$  に対して対称境界条件が成り立つから、図 4.3.7 の右側の領域が計算の対象領域となる。

この系の支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J \quad (3.3.19)$$

となる。但し、 $A$  はベクトル Potential の  $z$  方向成分である。

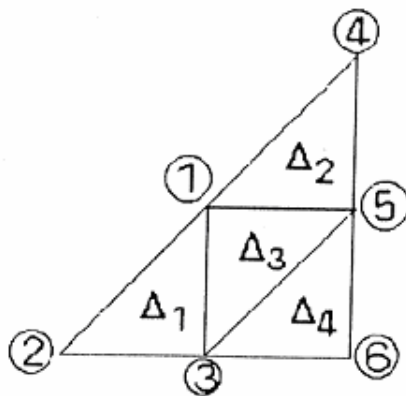


図 3.3.8

図 3.3.8 に示すように問題領域を直角二等辺三角形に離散化されたものとする。このとき、固定境界条件の入っていないシステム方程式は



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right] + \begin{array}{c} \Delta_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \Delta_3 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
& + \begin{array}{c} \Delta_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} = \frac{2}{24} \begin{array}{c} \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & + & 1 & + & 1 & + & 0 \\ 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 1 & + & 0 & + & 1 & + & 1 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & + & 1 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\end{aligned}$$

または

$$S\Psi = U$$

の形で書くと

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \\ 0.0833 \end{pmatrix} \quad (3.3.20)$$

となる。(3.3.20) 式に固定境界条件

$$A_4=A_5=A_6=0$$

を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.21)$$

となる。(3.3.21) 式を解いて

$$A_1 = 0.35$$

$$A_2 = 0.62$$

$$A_3 = 0.46$$

を得る。従って、(3.3.20) 式の解ベクトル  $\Psi$  は

$$\Psi = [0.35 \quad 0.62 \quad 0.46 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.3.22a)$$

となる。この結果を使って汎関数を求めると

$$\begin{aligned} F(A) &= \frac{1}{2} \Psi^T S \Psi - \Psi^T U \\ &= -0.1271 [\text{J/m}] \end{aligned} \quad (3.3.22b)$$

となる。この汎関数の絶対値は系の磁気エネルギーに等しいから、全体の領域は問題領域の 8 倍であることを考慮して、

$$\begin{aligned} 8(F(A)) &= \frac{1}{2} L I^2 \\ &= \frac{1}{2} L (2 \times 2^2)^2 \end{aligned} \quad (3.3.23.)$$

より

$$L = 0.0318 [\text{H/m}]$$

が得られる。この系の解析解による厳密なインダクタンスの値は  $L=0.0351 [\text{H/m}]$  であるから、有限要素法によるインダクタンスは小さめの（下限）値を与えることがわかる。

### 3.3.9 拡散方程式の例題

図 4.3.7 の角型強磁性体にステップ状の電流密度  $\mathbf{J}$  を印加した場合の動磁界分布を具体的な例題として取り上げる。この場合の支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\kappa \nabla \phi \quad (3.3.24)$$

で与えられる。いま、二次元問題であるから Coulomb gauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  が成り立ち、ステップ状印加電流密度が

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = \kappa (-\nabla \phi)$$

とすれば、(3.3.24) 式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A - \kappa \frac{\partial A}{\partial t} = -J \quad (3.3.25)$$

と変形される。(3.3.25) 式を図 3.3.8 に基づいて離散化すると、システム方程式は (4.3.11) 式より

$$[S - T]\Psi = U$$

の形に書ける。ここで、行列  $S$  とベクトル  $U$  は (3.3.20) 式と同じ結果で

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \\ 0.0833 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} \quad (3.3.26)$$

で与えられる。行列  $T$  は (3.3.8) 式より、 $\square=0.125$  として

$$T = -\frac{\partial}{\partial t} \kappa \frac{\Delta}{12} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta_3 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & + \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & + \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \kappa \frac{\Delta}{12} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.3.27)$$

となる。従って、全体のシステム方程式は

$$\left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \kappa \frac{\Delta}{12} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \\ 0.0833 \end{pmatrix} \quad (3.3.28)$$

と書ける。境界条件は

$$A_4 = A_5 = A_6 = 0$$

であり、導電率  $\kappa=1.2/0.125$ 、すなわち  $\kappa(\Delta/12)=\kappa(0.125/12)=0.1$  とすれば、解くべきシステム方程式は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} .6 & .1 & .2 \\ .1 & .2 & .1 \\ .2 & .1 & .6 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2500 \\ 0.0833 \\ 0.2500 \end{pmatrix}$$

または

$$C\mathbf{X} + D \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (3.3.29)$$

となる。(3.3.29) 式の時間方向の離散化を後方 Euler 法 (Backward Euler method) で離散化すると、 $\Delta t$  を時間刻み幅 (time stepwidth) として

$$\Delta t C X(t + \Delta t) + D[X(t + \Delta t) - X(t)] = \Delta t F$$

または

$$X(t + \Delta t) = [D + \Delta t C]^{-1} [DX(t) + \Delta t F] \quad (3.3.30)$$

を得る。(3.3.30) 式を初期値  $X(0)$  を 零ベクトルとし、時間刻み幅  $\Delta t = [S]$  として計算を実行すると以下の結果が得られる。

時間 t[S]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A <sub>1</sub>	.1408	.2204	.2692	.2999	.3195	.3320	.3400	.3451	.3484	.35
A <sub>2</sub>	.1958	.3447	.4445	.5089	.5508	.5775	.5946	.6055	.6125	.61
A <sub>3</sub>	.1696	.2745	.3409	.3832	.4103	.4296	.4387	.4457	.4503	.45

以上の結果を (3.3.31) 式と比較すれば、約 10 秒で定常状態に達していることが解る。

## 3.3.10 波動方程式の例題

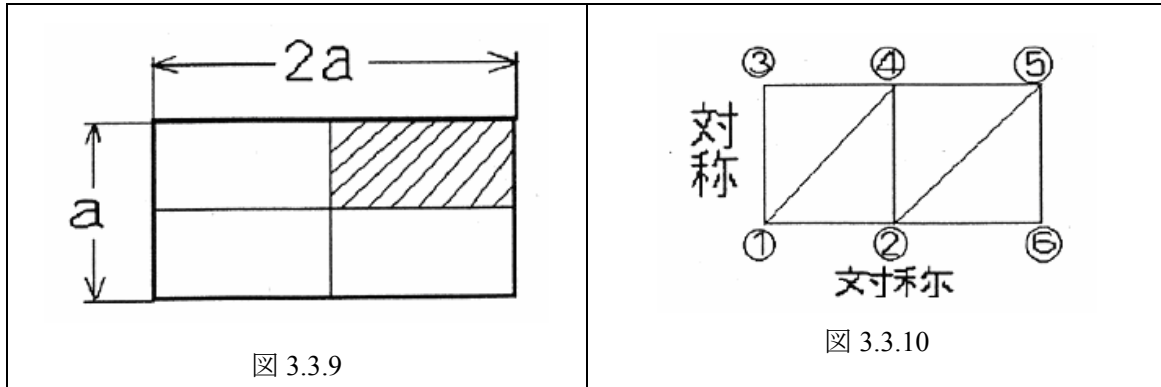


図 3.3.9

図 3.3.10

いま導体の存在しない空間で長方形の断面形状を持つ導波管を具体的な計算例として取り上げる。

図 3.3.9 に示す導波管において、対称性から斜線部のみを問題領域とすればよい。また、電界  $E$  が  $z$ -方向で、磁界が  $x$ - $y$  の平面方向、すなわち TM mode を考える。この場合の支配方程式は

$$\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0 \quad (3.3.31)$$

で与えられるから、 $z$ -方向の伝播定数を  $\beta$  として、電界  $E$  は

$$E = E(x, y) \exp[j(\omega t - \beta z)] \quad (3.4.53)$$

と仮定される。 $z$  を、 $z = (1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})t$ 、とすれば、(3.4.53) 式を (3.3.31) 式に代入して

$$\nabla^2 E + (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2) E = 0$$

または

$$\nabla^2 E + k_c^2 E = 0 \quad (3.3.54)$$

を得る。従って、

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - k_c^2} \quad (3.3.55)$$

$\beta = 0 \rightarrow \omega = k_c / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ : Cut-off angular frequency

$$\beta < 0 \rightarrow \omega < k_c / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} : E = E(x, y) \exp[j\omega t - \beta z]$$

の関係をj得る。以上のことから、この問題は (4.4.54) 式の固有値 (Eigen value)  $k_c$  を求める問題となることが解る。図 3.3.10 の三角形を用いて全体のシステム方程式を導くと  $\square = a^2/8$  として、

$$\left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - k_c^2 \frac{\Delta}{12} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.56)$$

を得る。導波管は完全導体で出来ていると仮定される。このため、導波管の壁面で、電界は零である。従って、境界条件は

$$E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 0$$

である。この境界条件を (4.3.56) 式に代入すれば、 $k_c^2 (\Delta/12) = k_c^2 a^2/96 = \lambda$ 、として

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} - k_c^2 \frac{\Delta}{12} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.57)$$

より固有値を求めると

$$\begin{vmatrix} 0.2826 - \lambda & -0.2174 \\ -0.1304 & 0.3696 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

であるから

$$\lambda^2 - 0.6522\lambda + 0.0761 = 0 \quad \text{より } \lambda = 0.5, \quad \lambda = 0.152$$

を得る。よって、導波管の固有値は

$$k_c = \sqrt{96\lambda/a} = 6.928/a, 3.822/a \quad (3.3.58)$$

となる。これらの固有値に対するそれぞれのモードは、(4.4.57) 式にそれぞれの固有値、 $\lambda$ を代入し、固有ベクトルを求めることで得られる。

解析解による厳密な TM<sub>nm</sub> モードの固有値は、

$$k_c = \sqrt{(n\pi/2a)^2 + (m\pi/a)^2}$$

で与えられ、最小固有値は TM<sub>11</sub> モードであるから

$$k_c = (\pi/a) \sqrt{(1/2)^2 + 1^2} = 3.512/a$$

となる。有限要素法による最小固有値は  $k_c = 3.822/a$  であるから、有限要素法による固有値は大きめの (上限) 値を与えることが解る。

### 3.3.11 双対映像法による開領域の有限要素解

**<a>開領域問題** デジタル計算機の普及と共に有限要素法で代表される数値解析法が、多くの工学、理学系の偏微分方程式で記述される問題の解析に広く活用されている。有限要素法は、その本質的な性質として、境界条件が明確に規定されたいわゆる閉領域中のフィールド計算を前提としている。このため、フィールドが無限遠点にまでつながる開領域問題に直接使用できない。工学、理学系の偏微分方程式で記述される問題の多くはこのような開領域を少なからず有する。特に電界や磁界分布を問題対象とする解析では、多かれ少なかれ開境界を有する問題を解くことに帰する。このことから有限要素法を開境界問題に拡張する試みがなされているのが現状である。一方、開境界問題を前提とする境界要素法が提案されたが、境界要素法は線形系の基本解を用いるため、磁気飽和などの強い非線形性を有する磁界系の問題には直接適用できない。このことから、非線形問題に適用可能な有限要素法と開領域問題に適用可能な境界要素法を結合したハイブリッド法が提案されている。しかしながら、いずれの方法でも開領域問題の有限要素解を得るためには、かなりのプログラミング技術と計算時間を要する。

本稿では、電気映像法を拡張した双対映像法によって開領域を閉領域に置き換え、この閉領域問題に有限要素法を適用する方法を述べる。従来の開領域問題に対して有限要素法を拡張する方法の多くが極めて技巧的であったのに対し、双対映像法は任意のベクトルフィールドが回転方向成分と発散方向成分から成ることに着目し、各々の方向成分を仮想境界に、零と対称境界条件を電気映像法によって設定することにより求める、原理的に従来の方法と異なる方法である。本稿では、電磁界系の問題の中で、開境界の影響が磁界系で特に顕著であるため、主として磁界系に関する開境界問題に対する双対映像法を紹介する。

#### <b>双対映像法

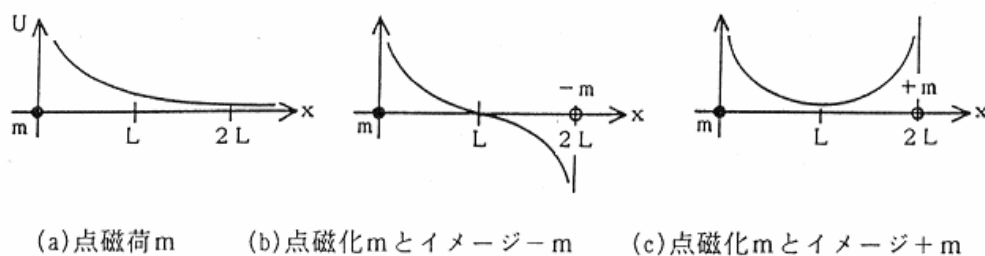


図 3.3.11

**【一次元問題】** 一次元問題では、フィールドが一方向にしか分布しないため、回転方向成分か発散方向成分のどちらか一方しか存在しない。従って、二次元や三次元問題と本質的に異なるが、そのアルゴリズムはまったく同じである。図 3.3.11 (a) に示すように点磁荷  $m$  があるとしよう。この時、磁界  $H$  は無限遠点にまで広がることは明らかであり  $H = -\nabla U$  で磁界を表すスカラーポテンシャル  $U$  は図 3.3.11 (a) 中に示す分布となる。さて点磁荷  $m$

に対して $-m$ のイメージ磁荷を $x=2L$ の点に想定すると、スカラーポテンシャル $U$ は、図 3.3.11 (b) に示すように、 $x=L$ の点で零となる。従って、イメージ磁荷 $-m$ を想定することで、開領域問題は、 $x=L$ の点を仮想境界とすれば、この仮想境界で零境界条件が設定され、閉領域問題となる。次に、点磁荷 $m$ と同じイメージ磁荷 $m$ を $x=2L$ の点に想定すれば、図 3.3.11 (c) に示すように、 $x=L$ の仮想境界で対称境界条件が設定され、再び開領域問題は閉領域問題に帰する。図 3.3.11 (b) と (c) のポテンシャルの平均は図 3.3.11 (a) のポテンシャル分布と一致することは、想定したイメージの磁荷 $-m$ と $+m$ が互いに打ち消し合うことから明らかである。いま、図 3.3.11 (b) のイメージ磁荷によって、 $x=L$ の点で零境界条件を設定して得られたシステム方程式を次式とする。

$$C_{11}X_z = F_s \quad (3.3.59)$$

ここで、 $C_{11}$ は係数行列、 $X_z$ は零境界の解ベクトル、さらに $F_s$ は磁界源 $m$ による入力ベクトルである。また図 3.3.11 (c) のイメージ磁荷によって、 $x=L$ の点で対称境界条件を設定し離散化して得られたシステム方程式を次式とする。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1s} \\ X_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.60)$$

ここで $C_{11}$ は(3.3.59)式と同じ内部領域の係数行列、 $C_{12}$ ( $=C_{3..1}$ )は $x=L$ の点の仮想境界と内部を結ぶ係数、 $C_{22}$ は $x=L$ 点の仮想境界上のポテンシャルの係数でありさらに、 $X_{1s}$ と $X_{2s}$ はそれぞれ対称境界解ベクトルで、内部の解ベクトルと仮想境界上のポテンシャルである。(3.3.59)、(3.3.60)式をまとめて書くと

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{1s} \\ X_{2s} \\ X_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \\ F_s \end{bmatrix} \quad (3.3.61)$$

となる。さて、双対映像法の解ベクトルは、(3.3.60)式と(3.3.61)式の解ベクトルの平均であるから、

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{1s} \\ X_{2s} \\ X_z \end{pmatrix} \quad (3.3.62)$$

と書ける。ここで、プライム'の付いたベクトルは双対映像法の解ベクトルを示す。(3.3.52)式から、次の接続行列 $C$ を得ることができる。

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.63)$$

この接続行列 $C$ は次の関係を満足する。



$$\begin{bmatrix} X_{1s} \\ X_{2s} \\ X_z \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_z \end{bmatrix} \quad (3.3.64)$$

(3.4.63) 式の接続行列によって、(3.3.61) 式は次のように変換される。

$$\left\{ C^T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} \end{bmatrix} C \right\} \cdot \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_z \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.65a)$$

又は、

$$\begin{bmatrix} 2C_{11} & 2C_{12} & -C_{11} \\ 2C_{21} & 2C_{22} & -C_{21} \\ -C_{11} & -C_{12} & C_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.65b)$$

(3.3.55b) 式で、 $X_z = X_1' + C_{11}^{-1} C_{12} X_2'$  であるから、(3.3.55b) 式は

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.66)$$

とも書くことができる。(3.3.66) 式が双対映像法による一次元の静磁界系のシステム方程式である。二次元、三次元問題では、(3.3.66) 式の係数  $C_{12}$ 、 $C_{3..1}$ 、 $C_{22}$  がそれぞれ小行列となり、仮想境界上のポテンシャル  $X_2'$  がベクトルとなるだけで、システム方程式の形はまったく同じとなる。しかし、ここで取り上げた図 3.3.11 (a) の例では、磁界  $H$  を決めるスカラーポテンシャル  $U$  の基準値が決まっていないことに注意しなければならない。従って、何等かの方法で図 3.3.11 (a) の原点  $x=0$  のポテンシャルを与えたとき (3.4.54) 式の解はユニークに決定される。後述の二次元／三次元及び軸対称問題では、問題空間のフィールド源の総和が零となるため、零ポテンシャルの位置を原点とすることができ解をユニークに決定できる。

**【二次元／三次元問題】** 図 3.3.12 (a) に示すように、有限要素法で離散化して得られた任意の電流  $i$  を考える。この電流に対して、原点から距離  $d$  の位置に  $-(d/a) i$  のイメージ電流を想定すると図 3.3.12 (a) に示すように電流  $i$  を取り囲む円／球上で、ベクトルポテンシャル  $A$  は零となる。従って、この円／球上で、半径方向の磁束密度は  $\partial A / \partial t = 0$  であるため零となる。よって電流  $i$  を取り囲む半径  $a$  の円／球上で零境界条件を設定することで、開領域フィールドの回転方向成分を求めることができる。問題空間中の他の電流に対しても、原点  $o$  と半径  $a$  の円／球状仮想境界が共通となるようにイメージ電流を想定すれば分布した電流に対しても回転方向成分を表すベクトルポテンシャルを求めることができる。工学、理学で現れる問題は、大部分の場合系全体としての電流は零となるから、仮想境界の外側

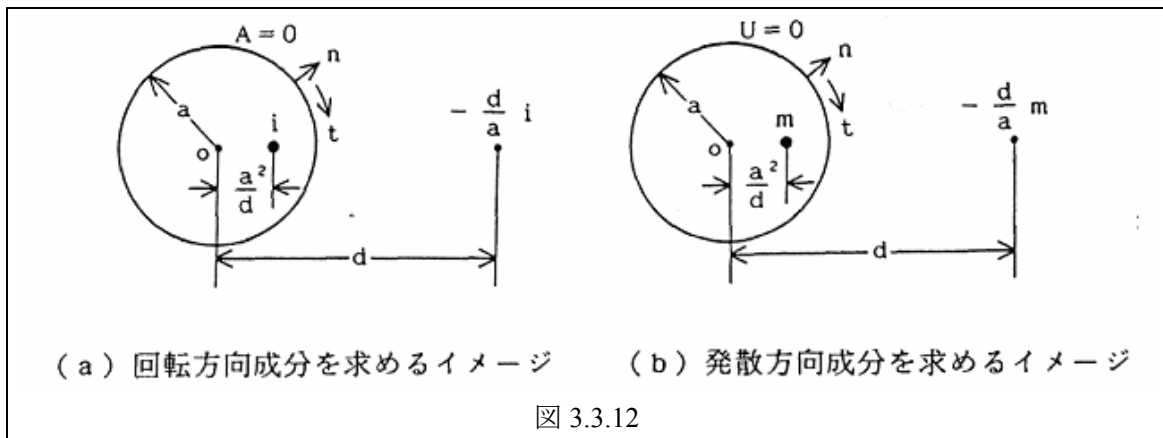
にあるイメージ電流の総和も零にならなければならない。

よって、

$$\sum_{p=1}^q (d_p / a) i_p = a \sum_{p=1}^q (d_p / a^2) i_p \quad (3.3.67a)$$

$$= a \sum_{p=1}^q (1 / r_p) i_p = 0 \quad (3.3.67b)$$

が成り立たなければならない。ここで、 $q$  は電流の総数を表し、 $d_p$  は  $i_p$  の電流に対するイメージ電流の位置、さらに  $r_p$  は原点  $o$  から電流  $i_p$  までの距離を表す。(3.3.57b) 式の条件は、原点  $o$  でベクトルポテンシャル  $A$  が零となることを示す。次に磁界源として、電流  $i$  の代わりに磁荷  $m$  を図 3.3.12 (b) に示すように考える。この磁荷  $m$  に対して、原点から距離  $d$  の位置に  $-(d/a)m$  のイメージ磁荷を想定すると図 3.3.12 (b) に示すように磁荷  $m$  を取り囲む円／球上で、スカラーポテンシャルは零となる。従って、半径  $a$  の円／球状仮想境界上で、回転方向の磁界は  $\partial U / \partial t = 0$  であるため、零となる。この円／球状仮想境界上の境界条件  $U=0$  をベクトルポテンシャルで表すと、 $\partial A / \partial n = 0$  の対称境界条件に対応する。よって、電流  $i$  を取り囲む半径  $a$  の円／球上において対称境界条件を設定することで、開領域フィールドの発散方向成分を求めることができる。



二次元／三次元問題のイメージ二次元、三次元での開領域フィールドを求める手順を整理すると以下ようになる。

- ・問題対称空間を有限要素法で離散化する。
- ・各節点の電流から、

$$\sum_{p=1}^q \frac{1}{r_p} i_p = 0 \quad (3.3.68)$$

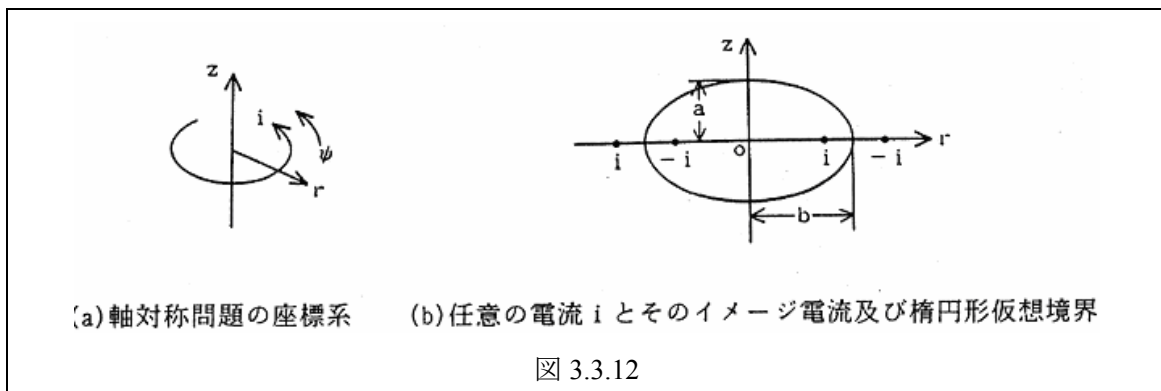
を満足する点を求める。

- ・(3.3.68) 式を満足する節点を原点として、問題空間を取り囲む半径の円／球を描く。
- ・原点のベクトルポテンシャル  $A=0$  と設定し、さらに半径  $a$  の円／球状の仮想境界で  $A=$

0 の零境界条件を設定して得られるシステム方程式を解くと、回転方向成分を満足する解ベクトルが求まる。

- 原点のベクトルポテンシャルを  $A=0$  と設定し、さらに半径  $a$  の円／球状の仮想境界で  $\partial A/\partial n=0$  の対称境界条件を設定して得られるシステム方程式を解くと、発散方向成分を満足する解ベクトルが求まる。

- 回転方向成分と発散方向成分を満足する解ベクトルの平均値が、開領域フィールドを満足する解ベクトルとして求められる。具体的な計算アルゴリズムは一次元問題とまったく同じであり、静磁界のシステム方程式も (3.3.68) 式とまったく同じ形となる。内部領域に磁性体を含む場合は、(3.3.68) 式左辺の 1 行 1 列の小行列  $C_{11}$  に磁性体の透磁率を考慮すればよい。



**【軸対称三次元問題】** パラメータを半径方向  $r$ 、円周方向  $\psi$ 、さらに  $Z$  方向とする  $(r, \psi, z)$  の円筒座標系において、有限要素法で離散化してえられる電流  $i$  が円周方向のみに流れているとしよう。図 3.3.12 (a) に示すように、任意の電流  $i$  とそのイメージ電流  $-i$  を考えると電流  $i$  を取り囲む楕円形に沿って円周方向のベクトルポテンシャル  $A$  は零となる。すなわち、軸対称問題における仮想境界の形状は図 3.3.12 (b) に示すように楕円形となる。円や球と違って、楕円は軸比  $b/a$  の組合せによって無数の形状を取る。従って、問題空間中のすべての電流に対して共通となるユニークな軸比を決定しなければならない。さて、図 3.3.12 (b) の  $r$ - $z$  平面で、多様な電流分布に対して共通となる軸比  $b/a$  を計算してみると  $b/a \approx 1.814$  となった。形状による磁化の容易さを表すパラメータとして反磁界係数  $N$  が知られている。楕円体の反磁界係数は、軸比を  $m=b/a$  とすれば

$$N_r = \left\{ \frac{1}{2(m^2 - 1)} \right\} \left[ \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - 1}} \cos^{-1}(1/m) - 1 \right] \quad (3.3.69a)$$

$$N_z = 1 - 2N_r \quad (3.3.69b)$$

で与えられる。ここで、 $N_r$  と  $N_z$  はそれぞれ半径  $r$  と軸方向の反磁界係数である。数値実験でえられた軸比  $m \approx 1.814$  を (3.3.69a), (3.3.69b) 式に代入してみると、 $N_z=0.5$ 、 $N_r=0.25$

となる。これは Z 軸方向と r 軸方向で磁化の容易さが 3.1 になっていることを意味する。これは、Z 軸と r 軸方向の起磁力の比が 3.1 であることを示している。よって、軸対称三次元問題は、図 3.3.12 (b) の軸比が

$$b/a \approx 1.81.4 \quad (3.3.70)$$

となる問題空間の全電流を取り囲む楕円形の仮想境界を設け、この仮想境界に零境界と対称境界条件を設定して得られる (3.3.66) 式と同一の形のシステム方程式を解くことに帰することとなる。

【例題】本稿では、理論的には一次元、二次元、三次元、さらに軸対称三次元について述べたが、比較的簡単であることから具体的例題として、二次元と軸対称三次元問題を取り上げることとする。

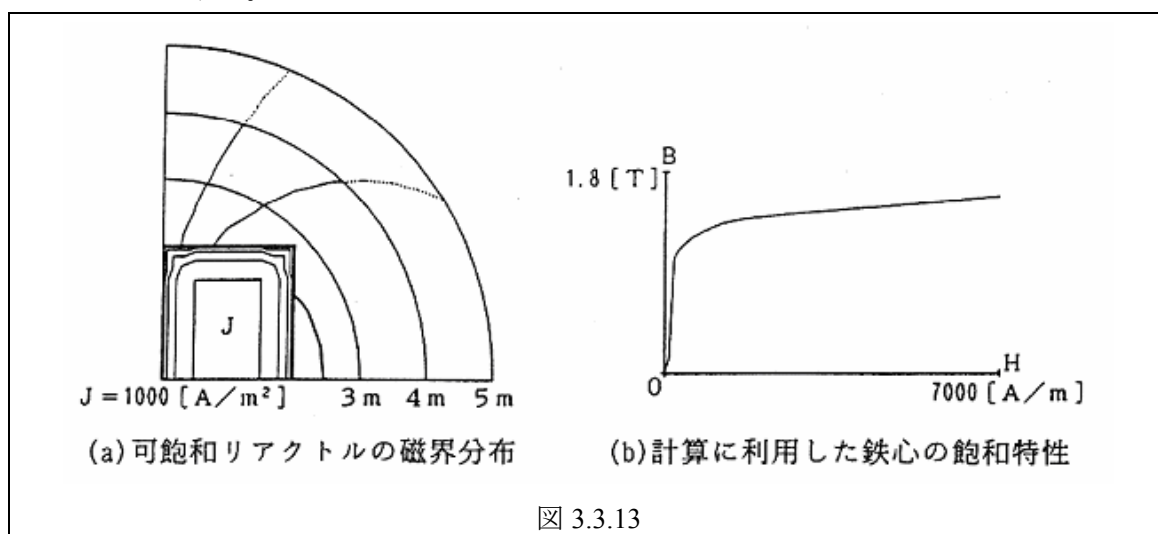


図 3.3.13 (a) に三脚鉄心を持つ可飽和リアクトルからの漏れ磁界を計算した例を示す。また、図 3.3.13 (b) に計算に採用した鉄心の飽和特性を示す。図 3.3.13 (a) では、解の一意性を調べるため仮想境界の半径を 3 種類変えて計算した結果を示してあるが、これらの解は独立に計算されたにもかかわらずほとんど重なっている。よって、双対映像法は磁気飽和を含む非線形な開領域問題に対しても一意的な解を与えることが解る。

図 3.3.14 に、アルミ合金製の円筒形導体に、励磁コイルから時間に対して指数関数状に変化する磁界が加わった場合の動的な磁界分布を示す。なお、この動的な場合のシステム方程式は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{11} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.71)$$

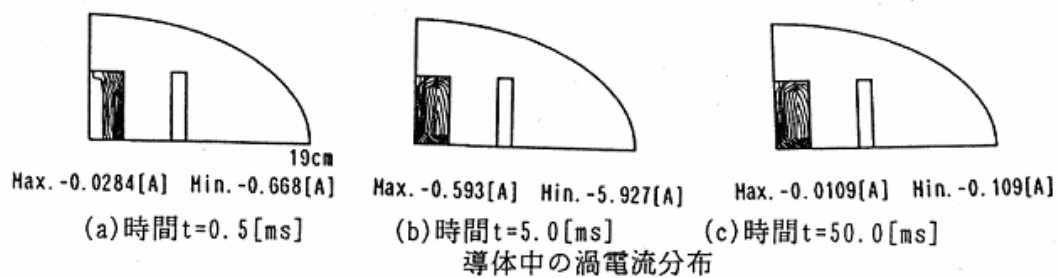
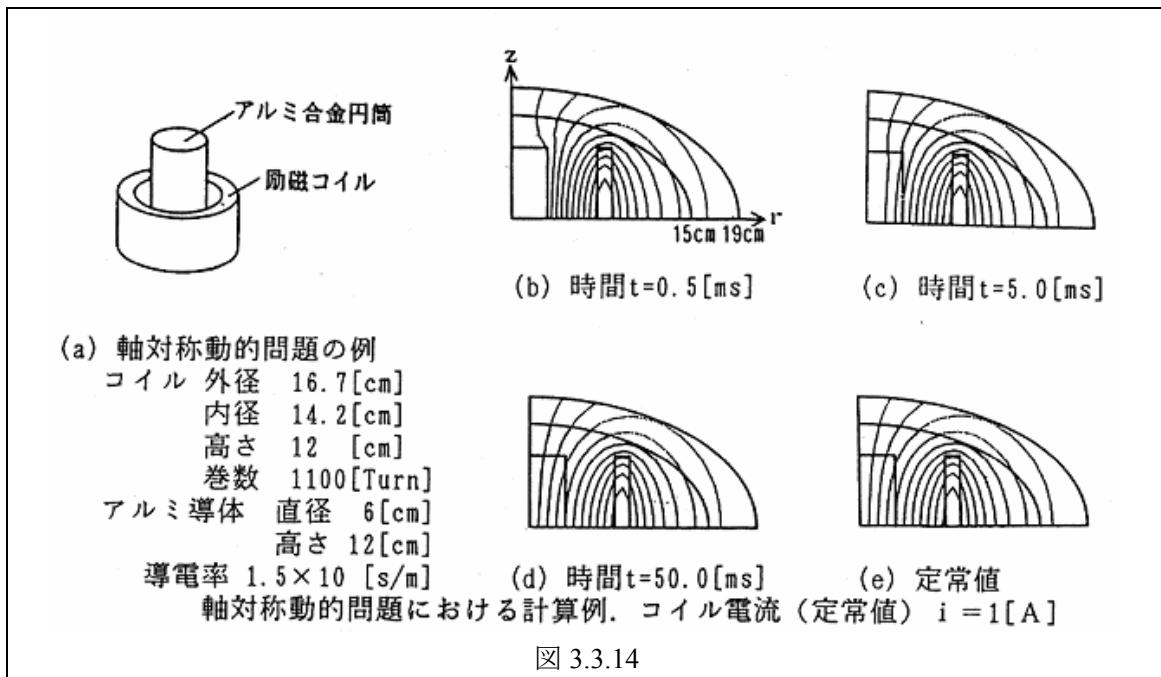
ここで、D は導体の存在に起因する行列である。図 3.3.14 の計算は (3.3.71) 式を

$$C_1 \mathbf{X}'_1 + D \frac{d}{dt} \mathbf{X}'_1 = \mathbf{F}_s \quad (3.3.72a)$$

$$C_1 = C_{11} - C_{12} [2C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}] C_{21} \quad (3.3.72b)$$

$$\mathbf{X}_2' = -[2C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}]^{-1} C_{21} \mathbf{X}_1' \quad (3.3.72c)$$

と変形し、(4.3.72a) 式の時間方向の離散化を後方差分法で行った。図 3.3.15 に導体中の渦電流分布を示す。さらに、図 3.3.16 に、円筒状導体の上、中、下部にサーチコイルを巻いて得た実験値と計算値の比較を示す。図 3.3.14–3.3.16 から、双対映像法は動的な系に対してもよい結果を与えることがわかる。



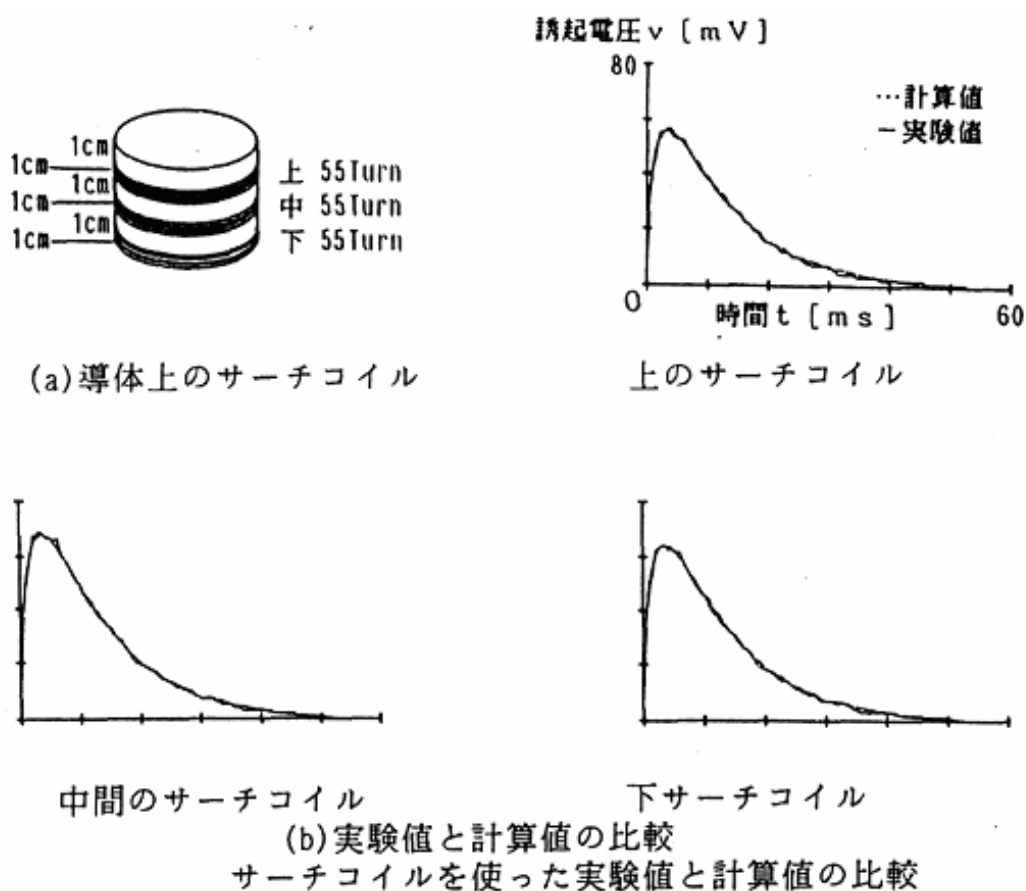


図 3.3.16

以上、有限要素法で開境界を有する電磁界を解析する方法として双対映像法を紹介した。開境界が無視できない磁界系を取り上げて、双対映像法の理論を説明したが、この理論はポテンシャルをベクトルポテンシャルからスカラーポテンシャルに変更することでそのまま電界系に対して成り立つことを付記しておく。

### 3.4 双反変分原理

#### 3.4.1 Laplace と Poisson の方程式

Laplace と Poisson の方程式の違いは同次か非同次方程式かである。ここでは、非同次である次式の Poisson の方程式について考える。

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma$$

この方程式に対して、次の双反変分原理を考える。

双反変分原理： $\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma$  の解は次の Complementary functional

$$G(\phi, \bar{\phi}) = -\frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{1}{\lambda} (\lambda \nabla \phi)^2 - 2\bar{\phi} \sigma \right] ds$$

を最大にすることである。 $(\bar{\phantom{x}})$  は規定値 (prescribed value) を示す。

いま、Poisson の方程式の近似解を

$$\begin{aligned} \psi &= \phi + \varepsilon v \\ \bar{\psi} &= \bar{\phi} + \varepsilon v \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

として、Complementary functional  $G(\phi, \bar{\phi})$  へ代入すると

$$\begin{aligned} G(\phi, \bar{\phi}) &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{1}{\lambda} [\lambda \nabla (\phi + \varepsilon v)]^2 - 2(\bar{\phi} + \varepsilon v) \sigma \right\} ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{1}{\lambda} (\lambda \nabla \phi)^2 - 2\bar{\phi} \sigma \right] ds - \varepsilon \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_S \lambda (\nabla v)^2 ds \\ &= G(\phi, \bar{\phi}) - \varepsilon \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_S \lambda (\nabla v)^2 ds \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

を得る。(3.4.3) 式の第一変分を求めると、

$$\begin{aligned} \delta G &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{[G(\psi, \bar{\psi}) - G(\phi, \bar{\phi})]}{\varepsilon} \right\} \\ &= - \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

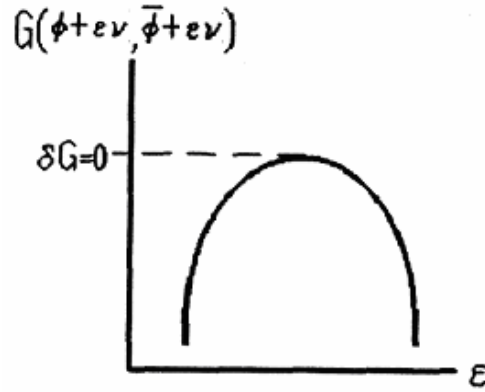


図 3.4.1

$G(\psi, \bar{\psi})$  は  $s$  に対して二次関数であり、 $\varepsilon^2$  の係数は常に負であるから、 $\delta G=0$  の極値は Complementary functional  $G(\psi, \bar{\psi})$  の最大値を意味する。(3.4.3) 式を Green の定理を用いて変形すると、

$$\int_s \lambda \nabla \phi \cdot \nabla v ds = - \int_s v \nabla^2 \phi ds + \int_c v \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\mathbf{l}$$

であるから、

$$\begin{aligned} - \int_s [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds &= \int_s v [\lambda \nabla^2 \phi + \sigma] ds - \int_c v \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

が得られる。従って、Complementary functional  $G(\psi, \bar{\psi})$  の第一変分  $\delta G=0$  を取り、最大値を求めることは

$$\int_s v [\lambda \nabla^2 \phi + \sigma] ds = 0 \quad (3.4.5)$$

$$\int_c v \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.4.6)$$

を意味し、

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma$$

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

の条件を同時に満足する。

### 3.4.3 拡散方程式と波動方程式

拡散方程式と波動方程式の違いは時間の一階微分か二階微分かにある。このため、ここでは、次の非同時 Helmholtz の方程式を考える。

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma$$



双反変分原理：  $\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma$  の解は次の Complementary functional

$$G(\phi, \bar{\phi}) = -\frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{1}{\lambda} (\lambda \nabla \phi)^2 - \omega \bar{\phi}^2 - 2 \bar{\phi} \sigma \right] ds$$

を最大にすることである。(  $\bar{\phantom{x}}$  ) は規定値 (prescribed value) を示す。

いま、Helmholtz の方程式の近似解を

$$\begin{aligned} \psi &= \phi + \varepsilon v \\ \bar{\psi} &= \bar{\phi} + \varepsilon v \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

として、Complementary functional  $G(\phi, \bar{\phi})$  へ代入すると

$$\begin{aligned} G(\psi, \bar{\psi}) &= -(1/2) \int_S \left\{ (1/\lambda) [\lambda \nabla(\phi + \varepsilon v)]^2 - \omega (\bar{\phi} + \varepsilon v)^2 - 2(\bar{\phi} + \varepsilon v) \sigma \right\} ds \\ &= -(1/2) \int_S \left[ (1/\lambda) (\lambda \nabla \phi)^2 - \omega \bar{\phi}^2 - 2 \bar{\phi} \sigma \right] ds - \varepsilon \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - \omega \bar{\phi} v - v \sigma] ds \\ &= -(\varepsilon^2 / 2) \int_S [\lambda (\nabla v)^2 - \omega v^2] ds \\ &= G(\phi, \bar{\phi}) - \varepsilon \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - \omega \bar{\phi} v - v \sigma] ds - (\varepsilon^2 / 2) \int_S [\lambda (\nabla v)^2 - \omega v^2] ds \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

を得る。(3.4.8) 式の第一変分を求めると、

$$\begin{aligned} \delta G &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ G(\psi, \bar{\psi}) - G(\phi, \bar{\phi}) \right\} / \varepsilon \\ &= - \int_S [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - \omega \bar{\phi} v - v \sigma] ds \\ &= \int_S v [\lambda \nabla^2 \phi + \omega \bar{\phi} + \sigma] ds - \int_C v \lambda (\partial \phi / \partial n) \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

が得られる。

従って、Complementary functional  $G(\psi, \bar{\psi})$  の第一変分  $\delta G = 0$  は

$$\int_S v [\lambda \nabla^2 \phi + \omega \bar{\phi} + \sigma] ds = 0 \quad (3.4.10)$$

$$\int_C v \lambda (\partial \phi / \partial n) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.4.11)$$

を意味し、(3.4.8) 式の右辺第 3 項の  $\varepsilon^2$  の係数が正である限り、この極値  $\delta G = 0$  は最大値をとることと一致する。3.3.2 で述べたように  $\varepsilon^2$  の係数は実際の電磁界問題の大部分で正の記号を取る。また、 $\phi$  は問題空間中の特定の位置における Potential の値を示し、結局 (3.4.10)

式の

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \bar{\phi} + \sigma = 0$$

は支配方程式である Helmholtz の方程式と同じ式である。

### 3.4.4 Energy functional

<a>Laplace と Poisson の方程式 静電界の例を考えると

$\phi$  : Scalar potential

$\lambda$  : 誘電率  $\epsilon$

$\sigma$  : 電荷密度  $\rho$

に対応するから、支配方程式は

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla \phi = -\rho$$

となる。このときの電界と電束密度は

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$= -\epsilon \nabla \phi$$

である。従ってこの場合の汎関数  $G(\phi)$

$$G(\phi, \bar{\phi}) = -\frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}^2 - 2\bar{\phi} \sigma \right] ds$$

となり、明らかに静電界 Energy となる。ここで、通常の Functional (これを Primal Functional と呼ぶ。)  $F(\phi)$  を再記すると

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \left[ \epsilon \mathbf{E}^2 - 2\phi \rho \right] ds$$

である。 $F(\phi)$  と  $G(\phi, \bar{\phi})$  を比較すると、エネルギーの入出力の方向が逆となっていること

が解る。

従って、

エネルギー最小系 :  $F(\phi)$  を Primal 系

エネルギー最大系 :  $G(\phi, \bar{\phi})$  を Complementary 系

とすれば、Primal 系でのエネルギーの蓄積は Complementary 系でのエネルギーの放出に対応することとなる。

静磁界系の例を考えると

$\phi$  : Vector potential の一成分  $A_z$

$\lambda$  : 透磁率の逆数 ( $1/\mu$ )

$\sigma$  : 電流密度の一成分  $J_z$

と対応する。このときの支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z = -J_z$$

であり、磁束密度と磁界は、 $\mathbf{i}$  と  $\mathbf{j}$  をそれぞれ  $x$  と  $y$  方向の単位ベクトルとして

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_z$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

で与えられる。さらに磁束密度と磁界による Energy は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} ds &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j} \right] \cdot \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j} \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} (\nabla A_z)^2 ds \end{aligned}$$

(3.4.12)

となる。従って、この場合の Complementary functional  $G(A_z, \overline{A_z})$  は

$$\begin{aligned} G(A_z, \overline{A_z}) &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \mu \left[ \frac{1}{\mu} \nabla A_z \right]^2 - 2 \overline{A_z} J_z \right\} ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \mu H^2 ds + \int_S \overline{A_z} J_z ds \end{aligned} \quad (3.4.13.)$$

と書ける。(3.4.13.) 式は明らかに静磁界系の Energy を表している。この場合の Primal functional を再記すると、

$$F(A_z) = \frac{1}{2} \int_S \frac{1}{\mu} B^2 ds - \int_S A_z J_z ds$$

である。Primal functional  $F(A_z)$  と Complementary functional  $G(A_z, \overline{A_z})$  の各項を比較すると、

エネルギーの入出力の違いだけでなく、同じエネルギーを表現するにも、Primal 系では磁束密度  $B$ 、Complementary 系では磁界  $H$  で表されてなければならないことがわかる。

**<b>拡散方程式と波動方程式** Quasi-static な磁界系を考える。各パラメータは

$\phi$  : Vector potential の一成分  $A_z$

$\lambda$  : 透磁率の逆数 ( $1/\mu$ )

$\sigma$  : 電流密度の一成分  $J_z$

$\omega$  : 導電率と時間の一階微分- $\kappa$  ( $\partial/t$ )

にそれぞれ対応する。また、支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z - \kappa \frac{\partial}{\partial t} A_z = J_z$$

である。この場合の Complementary functional  $G(A_z, \overline{A_z})$  は

$$\begin{aligned} G(A_z, \overline{A_z}) &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \mu \left[ \frac{1}{\mu} \nabla A_z \right]^2 + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_z}^2 - 2 \overline{A_z} J_z \right\} ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \left[ \mu H^2 + J_e \cdot A_z - 2 \overline{A_z} \cdot J_z \right] ds \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

となる。ここで、渦電流密度 (Eddy current density) を

$$J_e = \kappa \frac{\partial \overline{A_z}}{\partial t}$$

としている。(3.4.14) 式で、第一項は系に蓄えられる磁気エネルギー、第二項は渦電流による損失エネルギー、そして最後の項は入力エネルギーに対応する。

次に波動方程式の例として、Scalar potential  $\phi$  で表される Dynamic な系を考える。この場合のパラメータは

$\phi$  : Scalar potential

$\lambda$  : 誘電率  $\epsilon$

$\omega$  :  $-\mu\epsilon^2$  ( $\partial^2/t^2$ )

$\sigma$  : 電荷密度  $\rho$

にそれぞれ対応し、支配方程式は

$$\epsilon \nabla^2 \phi - \mu \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\rho$$

となる。これは Scalar potential  $\phi$  で表された波動方程式であり、この方程式に対応する

Complementary functional  $G(\phi, \overline{\phi})$  は

$$\begin{aligned}
 G(\phi, \bar{\phi}) &= -\frac{1}{2} \int_s \left\{ \frac{1}{\epsilon} [\epsilon \nabla \phi]^2 + \mu \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\phi}^2 - 2 \bar{\phi} \rho \right\} ds \\
 &= -\frac{1}{2} \int_s \left\{ \frac{1}{\epsilon} [\mathbf{D}]^2 + \mu \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\phi}^2 - 2 \bar{\phi} \rho \right\} ds
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

となる。従って、右辺第一項は系に蓄えられる電界エネルギー、第二項は波動で伝播するエネルギー、そして最後の項は入力エネルギーにそれぞれ対応する。

## 練習問題

- [1] Laplace の方程式に対する Complementary functional を書きなさい。
- [2] Laplace の方程式に対する Complementary functional を最大にすることで導かれる関係を述べなさい。
- [3.] 入力境界条件で決まる拡散方程式の Complementary functional を書きなさい。
- [4] 拡散方程式に対する Complementary functional を最大にすることで導かれる関係を述べなさい。
- [5] 同次形の波動方程式に対する Complementary functional を書きなさい。
- [6] 波動方程式に対する Complementary functional を最大にすることで導かれる関係を述べなさい。
- [7] 静的な磁界系に対する Complementary functional がどのような形のエネルギーに対応するかを述べなさい。
- [8] 静的な電界系に対する Complementary functional がどのような形のエネルギーに対応するかを述べなさい。
- [9] Quasi- static な電界系の Complementary functional がエネルギーに対応することを示しなさい。
- [10] Primal 系と Complementary functional 系間におけるエネルギーの入出力関係を述べなさい。

### 3.5 Voronoi - Delaunay の離散化法

#### 3.5.1 Voronoi- Delaunay 線図

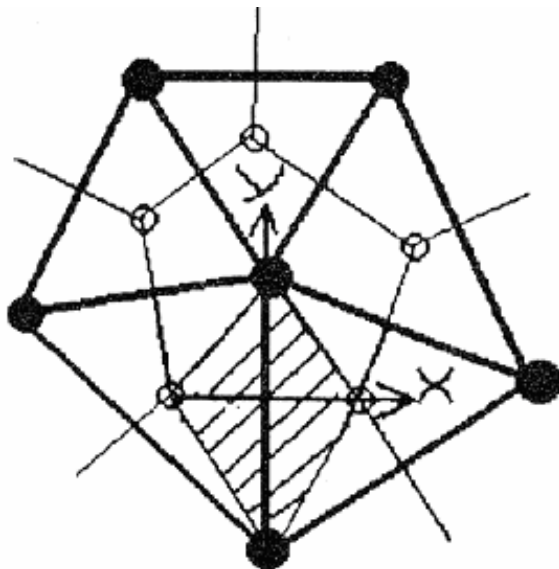


図 3.5.1

図 3.5.1 に示すように、空間に節点・が与えられたとき、各空間を節点に割り振ると、各節点・を取り囲む多角形が形成される。この多角形を Voronoi の多角形と呼ぶ。Voronoi の多角形の各辺に垂直な線分で各節点・を結ぶと三角形のメッシュが形成される。この三角形を Delaunay の三角形と呼ぶ。Voronoi 多角形の辺は Delaunay 三角形の辺の垂直二等分線となり、Voronoi の多角形の頂点は Delaunay の三角形の外心に位置する。従って、Delaunay の三角形の外心を結ぶことによって Voronoi の多角形が形成される。これは一方が決まれば、他方も自動的に形状が決定される幾何学的双対性 (Geometrical duality) を Voronoi の多角形と Delaunay の三角形が持っていることを意味している。

いま、Voronoi の多角形の二頂点と Delaunay の三角形の二頂点からなる図 3.5.1 の斜線部の四辺形を一個の要素として考えるとすれば、この四辺形の中心を原点とする局所直交座標系が形成される。Voronoi - Delaunay 線図におけるこの局所直交性を利用して、Voronoi 系に Complementary 系、Delaunay 系に Primal 系の変分原理を適用して偏微分方程式を解く方法が Voronoi- Delaunay の離散化法である。

#### 3.5.2 局所直交座標系 (Locally orthogonal coordinate system)

図 3.5.2 の局所直交座標系で、節点 1,2,3,4 に対して、次の補関関数

$$\psi = e + f_x + gy + hxy \quad (3.5.1)$$

を仮定し、各座標上のポテンシャルを  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  とすれば

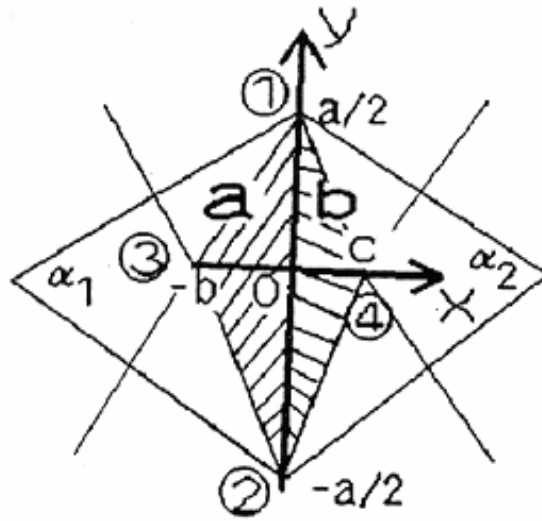


図 3.5.2

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \quad (3.5.2)$$

が成り立つ。しかし、(3.5.2) 式右辺、数行列の行列式の値は零であるから、(3.5.1) 式の係数  $e, f, g, h$  は一意的にポテンシャル  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  で表すことができない。これは、 $y$ -軸方向 (Delaunay 系) と  $x$ -軸方向 (Voronoi 系) でそれぞれ独立な補間関数を仮定しなければならないことを意味する。

### 3.5.3. 内挿関数

いま、図 3.5.2 で、領域  $a$  と  $b$  で異なった媒質のパラメータ  $\lambda_a, \lambda_b, \omega_a, \omega_b$  さらに Source density  $\sigma_a, \sigma_b$  を取るものとし、Delaunay 系に対しては Primal functional  $F(\phi)$ 、Voronoi 系に対しては Complementary functional  $G(\phi, \bar{\phi})$  を適用するものとするれば、非同次の Helmholtz の方程式

$$\lambda \nabla^2 \phi + \omega \phi = -\sigma$$

に対するそれぞれの Functional は

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \left[ \lambda (\nabla \phi)^2 - \omega \phi^2 - 2\sigma \phi \right] ds$$

$$G(\phi, \bar{\phi}) = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{1}{\lambda} [\lambda \nabla \phi]^2 - \omega \bar{\phi}^2 - 2\sigma \bar{\phi} \right\} ds$$



で与えられるから、各々の Functional の右辺第一項に着目すると、

Primal functional $F(\varphi)$ では $\square\varphi$ : 領域 a, b で共通
---

である。他方、

Complementary functional では $\lambda\square\varphi$ : 領域 a, b で共通
--

とならなければならない。

**<a>Primal (Delaunay) 系の補間関数** いま、図 3.5.2 の節点 1, 2 間で次の補間関数

$$\psi = e + f_y \quad (3.5.3.)$$

を仮定すると、節点 1, 2 のポテンシャルが  $\psi_1, \psi_2$  であるから

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a/2 \\ 1 & -a/2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

が成り立つ。従って、(3.5.3.) 式は

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{bmatrix} 1 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^2 \psi_i a_i \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

で与えられる。ここで、 $a_1, a_2$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} + \frac{y}{a} \\ a_2 &= \frac{1}{2} - \frac{y}{a} \end{aligned}$$

(3.5.5) 式の補間関数は節点 1, 2 が領域 a, b の境界に位置するため、両領域に  $\square\psi$  が共通となり、Primal 系の条件を満足する。

**<b>Complementary (Voronoi)系の補間関数** いま、図 3.5.2 で、x-軸と y-軸の交点 0 のポテンシャルを  $\psi_0$  とすれば、節点 3 から交点 0 までの補間関数を

$$\psi_a = \psi_0 + \left[ \frac{\psi_0 - \psi_3}{b} \right] x \quad (3.5.6)$$

とし、交点 0 から節点 4 までの補間関数を

$$\psi_b = \psi_0 + \left[ \frac{\psi_4 - \psi_0}{c} \right] x \quad (3.5.7)$$

とする。x-軸と y- 軸の交点 0 で  $\lambda\square\psi$  が両領域 a, b で共通となるためには

$$\lambda_a \frac{\partial \psi_a}{\partial x} = \lambda_b \frac{\partial \psi_b}{\partial x}$$

であるから、

$$\lambda_a \left[ \frac{\psi_0 - \psi_3}{b} \right] = \lambda_b \left[ \frac{\psi_4 - \psi_0}{c} \right] \quad (3.5.8)$$

を得る。従って、交点のポテンシャル  $\psi_0$  は

$$\psi_0 = \frac{\frac{\lambda_a}{b} \psi_3 + \frac{\lambda_b}{c} \psi_4}{\frac{\lambda_a}{b} + \frac{\lambda_b}{c}} \quad (3.5.9)$$

で与えられる。(4.5.9) 式を用いて、Voronoi 系の補間関数は

$$\text{領域 a に対して: } \psi = \sum_{i=3}^4 \psi_i a_i \quad (3.5.10)$$

$$a_3 = \frac{\frac{\lambda_a}{b} - \frac{\lambda_b}{c} \frac{x}{b}}{\frac{\lambda_a}{b} + \frac{\lambda_b}{c}}$$

$$a_4 = \frac{\frac{\lambda_b}{c} + \frac{\lambda_b}{c} \frac{x}{b}}{\frac{\lambda_a}{b} + \frac{\lambda_b}{c}}$$

$$\text{領域 b に対して: } \psi = \sum_{i=3}^4 \psi_i a_i \quad (3.5.11)$$

$$a_3 = \frac{\frac{\lambda_a}{b} - \frac{\lambda_a}{c} \frac{x}{b}}{\frac{\lambda_a}{b} + \frac{\lambda_b}{c}}$$

$$a_4 = \frac{\frac{\lambda_a}{b} + \frac{\lambda_a}{c} \frac{x}{b}}{\frac{\lambda_a}{b} + \frac{\lambda_b}{c}}$$

となる。

### 3.5.4 局所システム方程式(Local system equations)

<a>局所一次元化法(Locally one dimensional method) Voronoi-Delaunay 離散化法では、同一問題領域に対して、Voronoi 系の補間関数は x-方向成分のみであり、他方 Delaunay 系の補間関数は y-方向成分のみである。このため、支配方程式も x-成分と y-成分に分離できると仮定する。すなわち、

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \omega \psi = -\sigma \quad (3.5.12)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \omega \psi = -\frac{1}{2} \sigma \quad (3.5.13a)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \omega \psi = -\frac{1}{2} \sigma \quad (3.5.13b)$$

このように、x- 方向と y- 方向を局所座標系で分離して解く方法を局所一次元化法 (Locally one dimensional method) と呼ぶ。

**<b>Primal system equation** 局所座標系で一次元化した支配方程式 (3.5.13a) 式に対する Functional は

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_s \left[ \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\omega}{2} \phi^2 - \phi \sigma \right] ds \quad (3.5.14)$$

で与えられている。(3.5.14) 式の Primal functional に対する Delaunay 系の補間関数 (3.5.5) 式を(3.5.14) 式に 代入し、図 3.5.2 の斜線部について積分し、最小値を求めると、次のシステム方程式を得る。

$$[S_D - T_D] \Phi_D = U_D \quad (3.5.15)$$

$$S_D = \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right] \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_D = \frac{1}{24} [\omega_a \Delta_a + \omega_b \Delta_b] \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_D = [\phi_1 \quad \phi_2]^T$$

$$U_D = \frac{1}{2} [\Delta_a \sigma_a + \Delta_b \sigma_b] [1 \quad 1]^T$$

$$\Delta_a = \frac{ab}{2}, \Delta_b = \frac{ac}{2}$$

**<c>Complementary system equation** 局所座標系で一次元化した支配方程式 (3.5.13b) 式に対する Complementary functional は

$$G(\phi, \bar{\phi}) = -\frac{1}{2} \int_s \left\{ \frac{1}{\lambda} \left[ \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^2 - \frac{\omega}{2} \bar{\phi}^2 - \bar{\phi} \sigma \right\} ds \quad (3.5.16)$$

で与えられる。(3.5.16) 式の Complementary functional に対する Voronoi 系の補間関数 (3.5.10), (3.5.11) 式を代入し、図 3.5.2 の斜線部について積分し、最大値を求めると、次のシステム

方程式を得る。

$$[S_U - T_U]\Phi_U = U_U \quad (3.5.17)$$

$$S_U = \frac{1}{\frac{1}{2\lambda_a} \cot \alpha_a + \frac{1}{2\lambda_b} \cot \alpha_b} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_U = \begin{pmatrix} \omega_a \Delta_a & 0 \\ 0 & \omega_b \Delta_b \end{pmatrix}$$

$$\Phi_U = [\phi_3 \quad \phi_4]^T$$

$$U_U = [\Delta_a \sigma_a + \Delta_b \sigma_b][1 \quad 1]^T$$

$$\Delta_a = \frac{ab}{2}, \Delta_b = \frac{ac}{2}$$

(3.5.18)

### 3.5.5 全体のシステム方程式

<a>Primal System 図 3.5.3 に示す節点 1,2,3.に対するシステム方程式を導くことを考える。  
パラメータは

三角形 a :  $\lambda_a, \omega_a, \sigma$

三角形 b :  $\lambda_b, \omega_b, \sigma_b$

三角形 c :  $\lambda_c, \omega_c, \sigma_c$

面積  $a: \Delta_a = \Delta_{a1} + \Delta_{a2} + \Delta_{a3}, \quad b: \Delta_b = \Delta_{b1} + \Delta_{b2} + \Delta_{b3}, \quad c: \Delta_c = \Delta_{c1} + \Delta_{c2} + \Delta_{c3}$

とする。

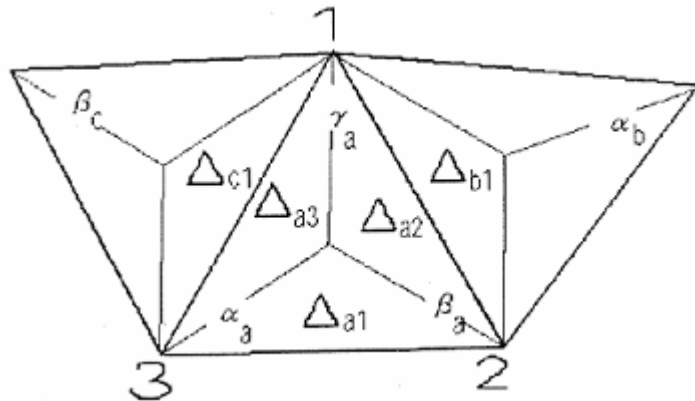


図 3.5.3

節点 1, 2 間では

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b & - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right] \\ - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right] & \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \end{array} \right] \\ - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) & 5(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) \\ 5(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) & 7(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta_{a2} \sigma_a + \Delta_{b1} \sigma_b \\ \Delta_{a2} \sigma_a + \Delta_{b1} \sigma_b \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{3.5.19}$$

が成り立ち、節点 1.3.間では

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c & - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c \right] \\ - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c \right] & \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c \end{array} \right] \\ - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7(\omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) & 5(\omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) \\ 5(\omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) & 7(\omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta_{a3} \sigma_a + \Delta_{c1} \sigma_c \\ \Delta_{a3} \sigma_a + \Delta_{c1} \sigma_c \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{3.5.20}$$

(3.5.19) 式と (3.5.20) 式で、節点ポテンシャル  $\psi_1$  は両式に共通であるから、両式を纏めて書くと、

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b + \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c & - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right] \\ - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right] & \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right] \\ - \left[ \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c \right] & 0 \end{array} \right] \\ - \left[ \begin{array}{c} \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c \\ 0 \\ \frac{\lambda_a}{2} \cot \beta_a + \frac{\lambda_c}{2} \cot \beta_c \end{array} \right] \end{bmatrix} - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1} + \omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) & 5(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) \\ 5(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) & 7(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_b \Delta_{b1}) \\ 7(\omega_a \Delta_{a2} + \omega_c \Delta_{c1}) & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 5(\omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) \\ 0 \\ 7(\omega_a \Delta_{a3} + \omega_c \Delta_{c1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta_{a2} \sigma_a + \Delta_{b1} \sigma_b + \Delta_{a3} \sigma_a + \Delta_{c1} \sigma_c \\ \Delta_{a2} \sigma_a + \Delta_{b1} \sigma_b \\ \Delta_{a3} \sigma_a + \Delta_{c1} \sigma_c \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

となる。これは、共通となる節点に関する部分の和をとることで全体のシステム方程式が得られることを意味している。

<b>Complementary system 図 3.5.4 に示す節点 1, 2, 3. に対するシステム方程式を導くことを考える。但し、パラメータは

三角形 a :  $\lambda_a, \omega_a, \sigma_a$

三角形 b :  $\lambda_b, \omega_b, \sigma_b$

三角形 c :  $\lambda_c, \omega_c, \sigma_c$

面積 a :  $\Delta_a = \Delta_{a1} + \Delta_{a2} + \Delta_{a3}$ ,  $b: \Delta_b = \Delta_{b1} + \Delta_{b2} + \Delta_{b3}$ ,  $c: \Delta_c = \Delta_{c1} + \Delta_{c2} + \Delta_{c3}$

とする。

節点 1, 2 間では

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} & -\frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} \\ -\frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} & \frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_a \Delta_{a2} & 0 \\ 0 & \omega_b \Delta_{b1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{a2} \sigma_a \\ \Delta_{b1} \sigma_b \end{bmatrix} \quad (3.5.22)$$

が成り立ち、節点 1, 3 間では

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_b} & -\frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_b} \\ -\frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_b} & \frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_a \Delta_{a3} & 0 \\ 0 & \omega_c \Delta_{c1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{a3} \sigma_a \\ \Delta_{c1} \sigma_c \end{bmatrix} \quad (3.5.23)$$

となる。

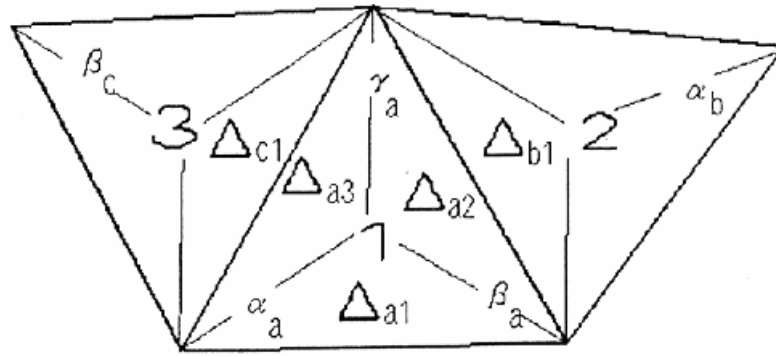


図 3.5.4

(3.5.22) 式と (3.5.23) 式で、節点ポテンシャル  $\psi_1$  は両式に共通であるから、両式を纏めて書くと、

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc} \frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} + \frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_c} & -\frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} \\ -\frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} & \frac{2\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b \cot \alpha_a + \lambda_a \cot \alpha_b} \\ -\frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_c} & 0 \end{array} \right] \\
 & - \left[ \begin{array}{cc} \frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_c} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2\lambda_a\lambda_c}{\lambda_c \cot \beta_a + \lambda_a \cot \beta_c} & 0 \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \omega_a(\Delta_{a2} + \Delta_{a3}) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_b\Delta_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_c\Delta_{c1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{a2}\sigma_a + \Delta_{a3}\sigma_a \\ \Delta_{b1}\sigma_b \\ \Delta_{c1}\sigma_c \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.5.24}$$

となる。これは、共通となる節点に関する部分の和をとることで全体のシステム方程式が得られることを意味している。

### 3.5.6 境界条件

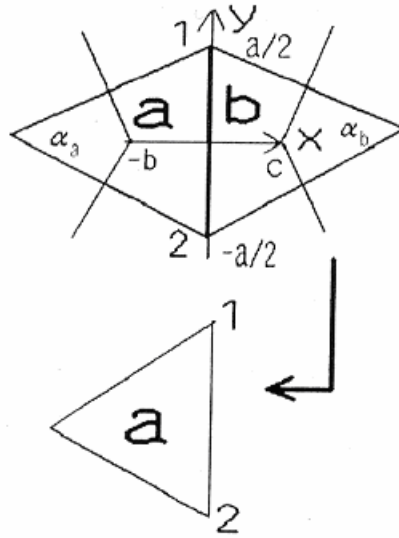


図 3.5.5

<a>Primal 系 図 3.5.5 に示すように右側の面積が零となり、右側が対称境界になったとする。このとき、節点 1 に対する節点方程式は

$$\left( \frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a + \frac{\lambda_b}{2} \cot \alpha_b \right) (\psi_1 - \psi_2) - \frac{1}{24} (\omega_a \Delta_a + \omega_b \Delta_b) (7\psi_1 + 5\psi_2) = \frac{1}{2} [\sigma_a \Delta_a + \sigma_b \Delta_b]
 \tag{3.5.25}$$

であり、

$$\Delta_a = \frac{ab}{2}, \Delta_b = \frac{ac}{2},$$

$$\frac{1}{2} \cot \alpha_a = \frac{b}{a}, \frac{1}{2} \cot \alpha_b = \frac{c}{a}$$

であるから、 $c \rightarrow 0$  として

$$\frac{\lambda_a}{2} \cot \alpha_a (\psi_1 - \psi_2)$$

$$- \frac{\omega_a \Delta_a}{24} (7\psi_1 + 5\psi_2) = \frac{1}{2} \Delta_a \sigma_a \quad (3.5.26)$$

と変形される。この場合、 $\partial \psi / \partial y \neq 0$  であるが、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (3.5.27)$$

となって、対称境界条件は自動的に満足される。

また、固定境界条件は境界上に位置する節点 1,2 に直接境界値  $\psi_1, \psi_2$  を代入すればよい。

#### <b>Complementary 系

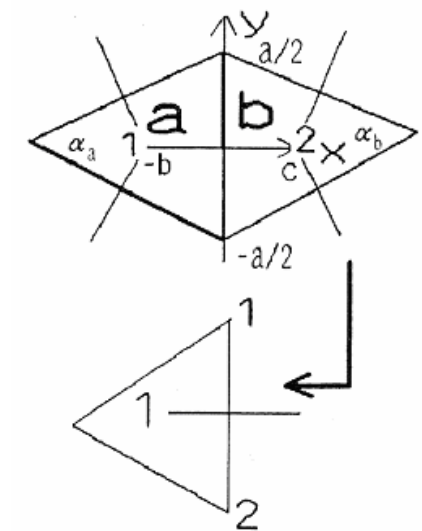


図 3.5.6

図 3.5.6 に示すように右側の面積が零となり、右側が対称境界になったとする。このとき、節点 1 に対する節点方程式は

$$\frac{2(\psi_1 - \psi_2)}{\frac{\cot \alpha_a}{\lambda_a} + \frac{\cot \alpha_b}{\lambda_b}} - \omega_a \Delta_a \psi_1 = \Delta_a \sigma_a \quad (3.5.28)$$



$$\Delta_a = \frac{ab}{2}, \frac{1}{2} \cot \alpha_a = \frac{b}{a}, \frac{1}{2} \cot \alpha_b = \frac{c}{a}$$

であるから、 $c \rightarrow 0$ ,  $\psi_1 = \psi_2 (\partial \psi / \partial x) = 0$  として

$$-\omega_a \Delta_a \psi_1 = \Delta_a \sigma_a \quad (3.5.29)$$

となる。(3.5.29) 式は (3.5.28) 式に対称境界条件  $\partial \psi / \partial n = \partial \psi / \partial x = 0$  を導入してあるため、対称境界条件を満足する。固定境界条件は、(3.5.28) 式で

$$c \rightarrow 0$$

とし、 $\psi_0$  を境界値 (局所 X- Y 座標系の原点のポテンシャル値)、

$$\psi_2 \rightarrow \psi_0$$

とすればよい。従って、節点方程式は

$$\frac{2\lambda_a (\psi_1 - \psi_2)}{\cot \alpha_a} - \omega_a \Delta_a \psi_1 = \Delta_a \sigma_a \quad (3.5.30)$$

となる。

### 3.5.7 Laplace の方程式の例題

<a>Primal系 具体的な例として、図 3.5.7 に示す同軸角型導体間の静電界分布を計算する。

図 3.5.7 で x 軸と k 軸に沿って  $\partial \phi / \partial n = 0$  の対称境界条件が成り立つから、解くべき問題領域は図 3.5.7 の領域となる。支配方程式は

$$\epsilon \nabla^2 \phi = 0 \quad (3.3.31)$$

であり、図 3.5.7 に示すように 6 個の直角二等辺三角形の Delaunay 三角形に分割されたとする。

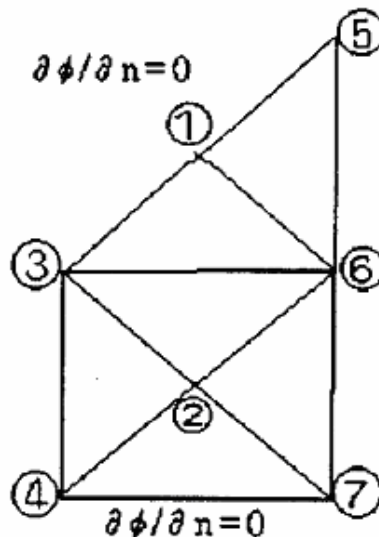


図 3.5.7

この場合の固定境界条件は  $\phi_3 = \phi_4 = 100$ ,  $\phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = 0$  で与えられる。

Primal 系のシステム方程式は

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & - & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.5.32)$$

となる。(3.5.32) 式は (3.3.14) 式と全く一致する。 $\psi_3=\psi_4=100$ 、 $\psi_5=\psi_6=\psi_7=0$  を代入し変形すると

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 \\ 200 \end{vmatrix} \quad (3.5.33)$$

を解いて、 $\psi_1=25$ 、 $\psi_2=50$  を得る。汎関数の値を (3.3.16) 式と同様にして求めると、 $F(\psi)=6875[\text{J/m}]$  となる。また、このエネルギーからキャパシタンスを求めると

$$C = (8 \times 6875) / [(1/2)100^2] = 11.0[\text{F/m}] \quad (3.5.34)$$

となる。この値は解析値  $C=10.2[\text{F/m}]$  に対して上限の値となる。

<b>Complementary 系

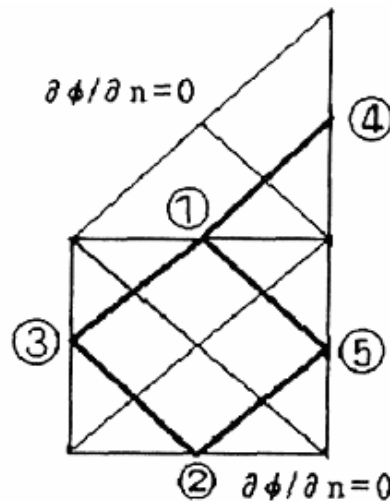


図 3.5.8

図 3.5.8 に図 3.5.7 に示す Delaunay の三角形の外心を結ぶことによって得られる Voronoi 系のメッシュを示す。この場合の Complementary 系のシステム方程式は

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.5.34)$$

で与えられる。 $\psi_3=100$ 、 $\psi_4=\psi_5=0$  を代入して変形すれば

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} \quad (3.5.35)$$

を得る。(3.5.35) 式を解いて  $\psi_1=33.33\dots$ 、 $\psi_2=50$  となる。汎関数  $G(\psi)$  は

$$\begin{aligned} |G(\phi)| &= (1/2) \begin{bmatrix} 33.3 & 50.0 & 100. & 0. & 0. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 33.3 \\ 50.0 \\ 100. \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \\ &= 5833.35[\text{J/m}] \quad (3.5.36) \end{aligned}$$

となる。従って、キャパシタンス  $C$  は

$$C = 8 \frac{5833.35}{\frac{1}{2}100^2} = 9.333[\text{F/m}] \quad (3.5.37)$$

となる。解析解によるキャパシタンスは  $C=10.2[\text{F/m}]$  であるため、Complementary 系による値は下限を与えることがわかる。

### 3.5.8 Poisson 問題の例題

<a>Primal 系 具体的な例題として図 3.5.9 に示す角形強磁性体中に電流が均一に分布している場合の静磁界分布を計算する。

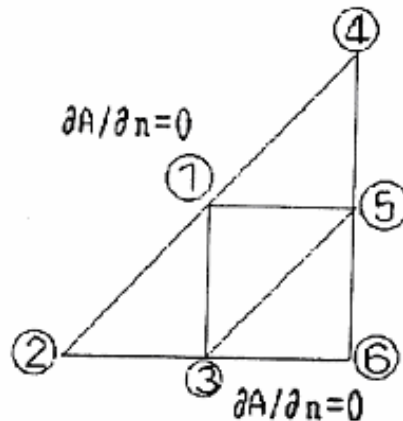


図 3.5.9

この問題の支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$$

であり、また Delaunay の三角形を図 3.5.9 に示す。境界条件は  $A_4=A_5=A_6=0$  であり、電流密度は  $\mathbf{J}=2[\text{A/m}^2]$  である。システム方程式は

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/32 \\ 1/8 \\ 1/32 \\ 1/8 \\ 1/16 \end{bmatrix} \quad (3.5.38)$$

となる。 $A_4=A_5=A_6=0$  を代入して変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2500 \\ 0.0625 \\ 0.2500 \end{bmatrix} \quad (3.5.39)$$

を得る。(3.5.3.9) 式を解いて、ポテンシャルは

$$[A_1 \ A_2 \ A_3] = [0.344 \ 0.563 \ 0.433] \quad (3.5.40)$$

となる。(3.5.40) 式の結果を用いて汎関数を求めると  $F(A) = 0.11.4[\text{m}]$  となり、インダクタンスは

$$L = 2 \times 8 \times \frac{0.115}{(4 \times 2)^2} = 0.0288[\text{H/m}] \quad (3.5.41)$$

を得る。この系の解析解によるインダクタンスは  $L=0.04.51[\text{H/m}]$  であるから、Primal 系によるインダクタンスは下限の値を与えることがわかる。

#### <b>Complementary 系

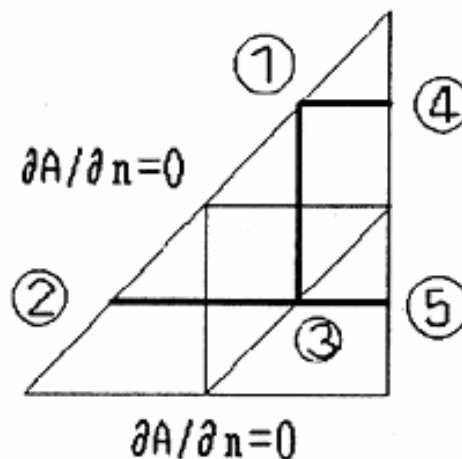


図 3.5.10

図 3.5.10 に図 3.5.9 の Delaunay の三角形に対応する Voronoi 系のメッシュを示す。境界条件は  $A_4=A_5=0$  であり、電流密度は  $J=2[\text{A/m}^2]$  である。システム方程式は

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.42)$$

となる。\$A\_4=A\_5=0\$ を代入して

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.50 \end{bmatrix} \quad (3.5.43)$$

を得る。(3.5.43) 式を解いてポテンシャルは

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.188 & 0.563 & 0.313 \end{bmatrix} \quad (3.5.44)$$

となる。(3.5.44) 式の結果を用いて汎関数を求めると \$G(A) = 0.1713[\text{J/m}]\$ となり、インダクタンスは

$$L = 2 \times 8 \times \frac{0.1713}{(4 \times 2)^2} = 0.0428[\text{H/m}] \quad (3.5.45)$$

を得る。この値を解析値 \$L=0.0351[\text{H/m}]\$ と比較すると、Complementary 系によるインダクタンスは上限の値を与えることがわかる。

### 3.5.9 拡散方程式の例題

<a>Primal 系 図 3.3.7 の角形強磁性体にステップ状の均一電流密度 \$J\$ が印加された場合の動磁界分布を具体的例題として取り上げる。この問題の支配方程式は (3.3.25) 式

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} - \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{J}$$

で与えられる。従って、局所一次元化した Primal 系に対する支配方程式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \mathbf{J} \quad (3.5.46)$$

となる。図 3.5.9 の Delaunay の三角形を用いて Primal 系のシステム方程式を導くと、

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \kappa(0.125/24) \begin{bmatrix} 14 & 0 & 5 \\ 0 & 7/2 & 5/2 \\ 5 & 5/2 & 14 \end{bmatrix} \left( \frac{d}{dt} \right) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2500 \\ 0.0625 \\ 0.2500 \end{bmatrix} \quad (3.5.47)$$

(3.5.47) 式を \$\kappa=1.2/0.125\$, \$\square t=1[\text{sec}]\$ として、後方 Euler 法で解くと次の結果が得られる。

t (sec)	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
1	0.1356	0.1787	0.1551
2	0.2132	0.3098	0.2559
3	0.2606	0.3985	0.3207
4	0.2905	0.4567	0.3624
5	0.3096	0.4944	0.3892
6	0.3218	0.5187	0.4065
7	0.3296	0.5343	0.4175
8	0.3347	0.5444	0.4247
9	0.3379	0.5508	0.4292
10	0.3400	0.5550	0.4332

<b>Complementary 系 (3.5.46) 式を図 3.5.10 のメッシュを用いて Complementary 系のシステム方程式を導くと

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + 0.125\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.50 \end{bmatrix} \quad (3.5.48)$$

(3.5.48)式で、 $\kappa=1.2/0.125$  とし、さらに $\Delta t=1[\text{sec}]$ として後方 Euler 法で解くと次の結果が得られる

t (sec)	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
1	0.0876	0.1672	0.1179
2	0.1293	0.2902	0.1879
3	0.1515	0.3770	0.2311
4	0.1644	0.4369	0.2587
5	0.1724	0.4777	0.2767
6	0.1775	0.5054	0.2886
7	0.1808	0.5240	0.2965
8	0.1830	0.5366	0.3017
9	0.1845	0.5451	0.3053
10	0.1854	0.5508	0.3076

## 3.5.10 波動方程式の例題

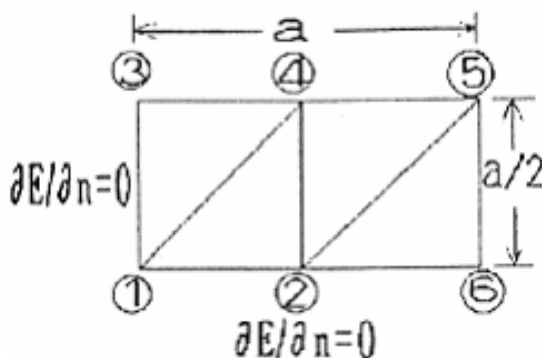


図 4.5.11

<a>Primal 系 具体的な例として、図 4.3.9 に示す導波管で TM mode を考える。この場合も支配方程式は、(3.4.43) 式

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0$$

で与えられる。図 3.5.11 に Delaunay 系の三角形メッシュを示す。境界条件は、 $E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 0$  であるこの場合の支配方程式は次式となる。但し、 $\Delta = a^2 / 8$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} - k_c^2 (\Delta / 24) \begin{bmatrix} 7 & 5/2 \\ 5/2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.49)$$

(3.5.49) 式から固有値を求めると

$$k_c = (1/a)7.045$$

$$k_c = (1/a)3.767$$

となる。

<b>Complementary 系

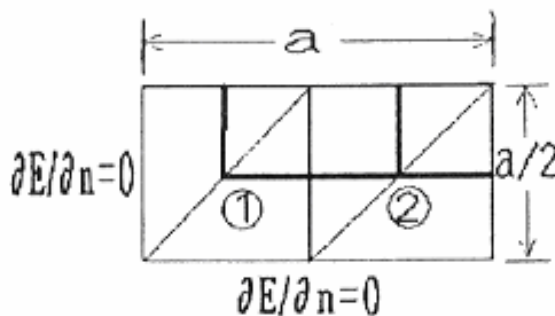


図 3.5.12

図 3.5.12 に図 3.5.11 の Delaunay の三角形に対応する Voronoi のメッシュを示す。この場合のシステム方程式は

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix} - k_c^2 \Delta \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.5.50)$$

となる。(3.5.50) 式から固有値を求めると、

$$k_c = (1/a)4.625$$

$$k_c = (1/a)3.216$$

となる。

### 3.5.11 収束性

**<a>Laplace 問題** FEM, Primal および Complementary によるエネルギーとキャパシタンスの計算結果を表 3.5.1 に示す。

表 3.5.1

	解析解	FEM	Primal	Comple.	(P+C)/2
エネルギー	51000	55000	55000	46668	50834
キャパシタンス	10.2	11.0	11.0	9.333	10.17

表 3.5.1 で(P+C)/2 は Primal と Complementary の平均値を示す。この結果から、FEM と Primal は正の誤差を持ち、節点数の増加と共に真の解に近づくこととなる。すなわち、エネルギー最小原理が成り立っている。これに対し、Complementary 系は負の誤差を持つことからエネルギー最大で解が求められていることを意味している。Primal と Complementary の平均値は誤差が打ち消すため最も高精度な結果となる。

**<b>Poisson 問題** FEM, Primal および Complementary によるエネルギーとインダクタンスの計算結果を表 3.5.2 に示す。

表 3.5.2

	解析解	FEM	Primal	Comple.	(P+C)/2
エネルギー	-1.1232	-1.0166	-0.92	-1.37	-1.145
インダクタンス	0.0351	0.0318	0.0288	0.0428	0.0358

表 3.5.2 から、FEM と Primal は大きめのエネルギーを与え、Complementary 系は小さめのエネルギーを与えることがわかる。すなわち、FEM と Primal はエネルギー最小則、Complementary はエネルギー最大則が成り立っていることがわかる。エネルギー・インダクタンスのいずれも Primal と Complementary の平均値は良い結果を与える。

**<c>Diffusion 問題** 3.3.9 の FEM による結果と 3.5.9 <a>の Primal の結果は 3.5.9 <b>の Complementary の結果と比較して、早く定常値に達する傾向を示している。これは、FEM と Primal による固有値(Time Constant の逆数) が大きめの値を与えるのに対し、Complementary



による固有値が小さめの値を与えることを意味する。この事実は、次の Wave 問題の固有値で確認される。

**<d>Wave 問題** Waveguide の固有値問題で、いずれのモードに属するかは固有ベクトルをプロットしなければならない。このため、最小固有値について FEM, Primal, Complementary による結果を比較する。

表 3.5.3

TM <sub>11</sub>	解析解	FEM	Primal	Comple.	(P+C)/2
$x(1/a)$	3.512	3.822	3.767	3.216	3.492

表 3.5.3 は FEM, Primal は大きめの固有値となり、Complementary は小さめの固有値となる。また、Primal と Complementary の平均値は良好な結果を与える。以上の結果から、Voronoi- Delaunay 法による方法は Primal と Complementary の 2 回の計算を必要とするが最も良好な結果を与える。その後の研究によれば、FEM で 100 節点を必要とする精度が Primal と Complementary 各々 10 節点程度で求まることが示されている。計算速度で比較すると約 3.0 倍程度の高速化ができる。更に、その後の研究によれば、Voronoi 系の解から Delaunay 系の解が得られる Voronoi-Delaunay 変換法が開発されている。欠点はプログラムが複雑化することである。

### 3.5.12 Voronoi — Delaunay 変換

**<a>高速・高精度計算** デジタル計算機の広汎な普及と共に、有限要素法を中心とする数値解析技術の急速な進歩が促され、電気・磁気装置の設計・解析にも広く活用されるようになっていく。従来の設計・解析法に比較して、デジタル計算機を前提とする数値解析法は、解析解の望めない非線形性まで考慮した精密な解析を可能とする点に大きな違いが見られる。通常、有限要素法でより精密な結果を得ようとする場合、必然的に巨大なシステム方程式を解くことに帰し、結果として大型計算機やスーパーコンピュータなどの機器を活用しなければならない。このことから Penman などを中心とするグループによって、双反変分原理を活用する方法が電磁界系に対して提唱された。有限要素法がエネルギー最小原理に基づくため常に解の上限を与えるのに対し双反変分原理に基づく有限要素法は常に解の下限を与える。従って、両者の解の平均は誤差が打ち消し合うために、個々のシステム方程式は小規模であっても、より精度の高い解が得られる。これが通常の Dual Energy Finite Element Method の原理である。しかし、エネルギー最小系 (Primal System と呼ぶ) とエネルギー最大系 (Complementary System と呼ぶ) とで異なった種類のポテンシャルを使うため、従来の Dual Energy Finite Element Method では、精度の高い Energy Functional を得ることができてもフィールド分布を表すポテンシャルの精度まで向上させることができない。

この欠点が Dual Energy Finite Element Method の普及を妨げている大きな要因の一つと考えられる。本稿では、従来の Dual Energy Finite Element Method の欠点を捕う、Voronoi - Delaunay 線図の幾何学的双対性を利用した Dual Energy Finite Element Method を述べた。この Voronoi- Delaunay 線図に基づく Dual Energy Finite Element Method は、Primal 系と Complementary 系に同一のポテンシャルを使うため、高精度の Energy Functional のみならず高精度のポテンシャルをも得ることを可能にした。ここでは、二次元の磁界系を中心として Primal 系と Complementary 系の両方のシステム方程式を解く必要なく、Complementary 系 (Voronoi 系) の解から Primal 系 (Delaunay 系) の解が与えられることを示し、Dual Energy Method が一システム方程式で実行できることから、従来の有限要素法に比較して一桁程度小さいシステム方程式で同等の結果が得られることを示す。

#### <b>Voronoi- Delaunay 変換法

【基礎方程式】いま、Voronoi 系と Delaunay 系の磁界系拡散問題に関するシステム方程式をそれぞれ

$$D_v \phi_v + E_v(d/dt)\phi_v = F_v \quad (3.5.51)$$

$$D_d \phi_d + E_d(d/dt)\phi_d = F_d \quad (3.5.52)$$

とする。(3.5.51) 式と (3.5.52) 式の各項はそれぞれ(4.5.9)式の拡散方程式に関する例題の Voronoi 系と Delaunay 系のそれらに対応する。

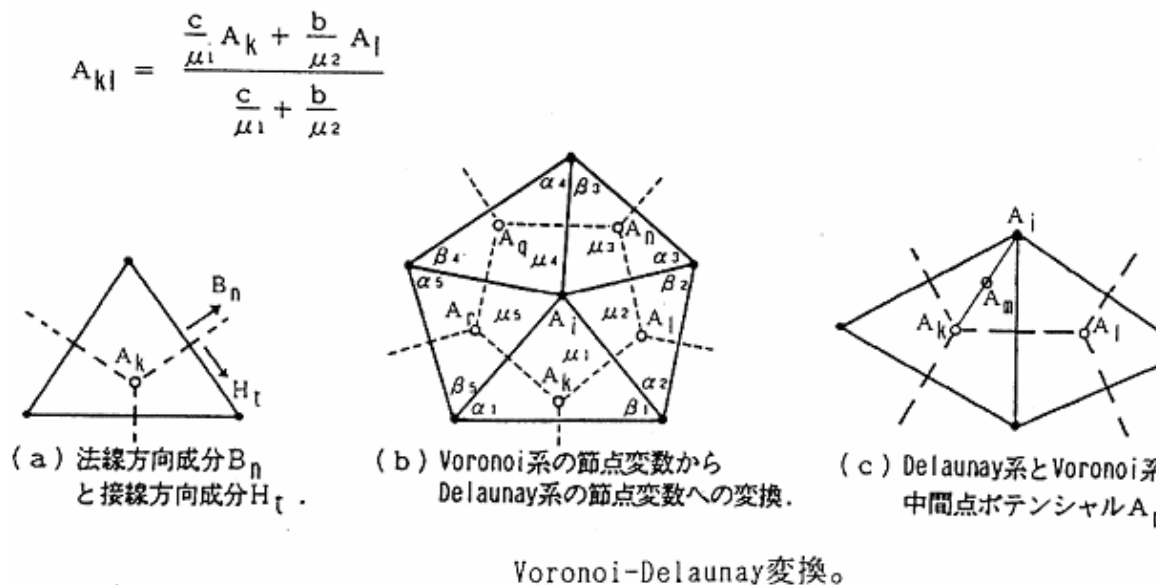


図 3.5.12

【Voronoi-Delaunay 変換】Voronoi 系は隣接する Delaunay の三角形間の境界で接線方向の磁界  $H_t$  を共通として導かれた。しかし、図 3.5.12 (a) に示してある Delaunay の三角形の境界に法線方向の磁束密度成分  $B_n$  も、Voronoi 系の解ポテンシャル全体に含まれている。この法

線方向成分  $B_n$  に関する要素間の境界条件を満足する節点は Delaunay 系の節点に位置せざるを得ない。従って、Voronoi 系の解ベクトルから、 $B_n$  成分に関する要素間の境界条件を満足するポテンシャルは Delaunay の三角形の頂点で Laplace の方程式

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.5.53)$$

を満足しなければならない。外部入力項や渦電流密度の項は既に Voronoi 系のシステム方程式に含まれているため、(3.5.53) 式にこれらは含まれない。Delaunay 系の離散化法を用いて (3.5.53.) 式を離散化し、図 3.5.12 (b) の節点ポテンシャル  $A_i$  を Voronoi 系の解ポテンシャルで表すと、

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\mu_1} \cot \alpha_1 + \frac{1}{\mu_2} \cot \beta_2 \right] A_{k1} + \left[ \frac{1}{\mu_2} \cot \alpha_2 + \frac{1}{\mu_3} \cot \beta_3 \right] A_{ln} \\ & + \left[ \frac{1}{\mu_3} \cot \alpha_3 + \frac{1}{\mu_4} \cot \beta_4 \right] A_{nq} + \left[ \frac{1}{\mu_4} \cot \alpha_4 + \frac{1}{\mu_5} \cot \beta_5 \right] A_{qr} \\ & + \left[ \frac{1}{\mu_5} \cot \alpha_5 + \frac{1}{\mu_1} \cot \beta_1 \right] A_{kr} = \left[ \sum_{j=1}^5 \frac{1}{\mu_j} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) \right] A_i \end{aligned} \quad (3.5.54)$$

となる。ここで、角度  $\alpha_1$ - $\alpha_5$ 、 $\beta_1$ - $\beta_5$  は図 3.5.12 (b) に示してあり、 $A_{k1}$ 、 $A_{ln}$ 、 $A_{nq}$ 、 $A_{qr}$ 、 $A_{kr}$  は Voronoi の多角形と Delaunay 三角形それぞれの辺の交点ポテンシャルであり、例えば  $A_{ki}$  は次式で与えられる。

$$A_{k1} = \frac{(c/\mu_1)A_k + (c/\mu_2)A_l}{(c/\mu_1) + (b/\mu_2)} \quad (3.5.55)$$

(3.5.54)、(3.5.55) 式と同様にして、他の Delaunay 系の節点ポテンシャルも Voronoi 系の節点ポテンシャルで表されるから、Delaunay 系のポテンシャルベクトル  $\phi_D$  は接続行列  $C$  とポテンシャルベクトル  $\phi_V$  を用いて、

$$\phi_D = C \phi_V \quad (3.5.56)$$

と表される。(3.5.56) 式の関係から、(3.5.52) 式の Delaunay 系のシステム方程式は Voronoi 系へ以下のように変換される。

$$[C^T D_D C] \phi_U + [C^T E_D C] (d/dt) \phi_U = C^T F \quad (3.5.57)$$

または Voronoi 系と Delaunay 系を合成して、

$$D \phi_U + E (d/dt) \phi_U = F \quad (3.5.58)$$

と書ける。ここで、

$$D = \frac{1}{2} \left[ (C^T D_D C) + D_U \right] \quad (3.5.59a)$$

$$E = \frac{1}{2} \left[ (C^T E_D C) + E_U \right] \quad (3.5.59b)$$

$$F = \frac{1}{2} \left[ C^T F_D + D_U \right] \quad (3.5.59c)$$

である。(3.5.59a) - (3.5.59c) 式で、係数  $1/2$  は、入力ベクトルの項が 2 倍になるためである。(3.5.52) 式は要素間の境界条件で法線方向の磁束密度  $B_n$  に関する条件のみ満足しているのに対し (3.5.51) 式は要素間の境界条件で接線方向の磁界  $H_t$  に関する条件のみ満足している。しかし、(3.5.58) 式は両方の要素間境界条件を満足しているが解ベクトルそのものは Voronoi 系の解ベクトル  $\phi_U$  である。このため、Voronoi 系の節点と Delaunay 系の節点の中間点に位置するベクトルを  $\phi_M$  とし次のように定義する。

$$\phi_M = C_{DM} \phi_D + C_{UM} \phi_U \quad (3.5.60)$$

ここで、 $C_{DM}$  と  $C_{UM}$  は、それぞれ Delaunay 系の節点と Voronoi 系の節点から中間点への内挿行列であり、例えば図 (3.5.12) の中間ポテンシャル  $A_m$  は次式で与えられる。

$$A_m = \frac{A_i + A_k}{2} \quad (3.5.61)$$

さらに (3.5.56) 式の関係から、(3.5.60) 式は

$$\phi_M = (C_{DM} C + C_{UM}) \phi_U \quad (3.5.62)$$

とも書ける。Delaunay 系のポテンシャルベクトル  $\phi_D$  は要素間の境界条件で法線方向の磁束密度  $B_n$  に関する条件のみ満足しているのに対し、Voronoi 系のポテンシャルベクトル  $\phi_U$  は要素間の境界条件で接線方向の磁界  $H_t$  に関する条件を満足している。従って、(3.5.60)、

(3.5.62) 式で与えられる中間点ポテンシャルベクトル  $\phi_M$  は両方の要素間境界条件を考慮したものとなるため、精度の改善されたベクトルとなる。

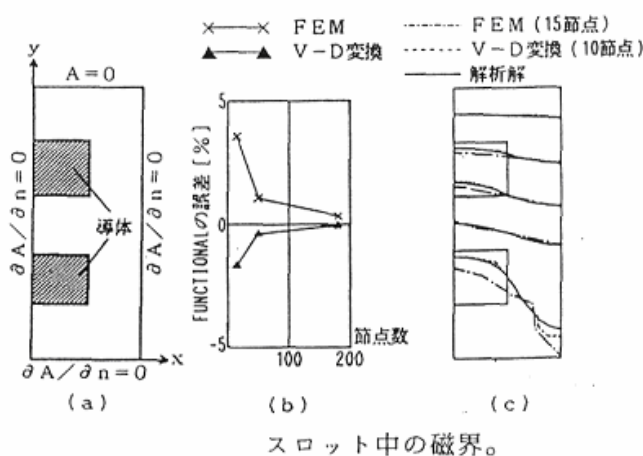


図 3.5.13

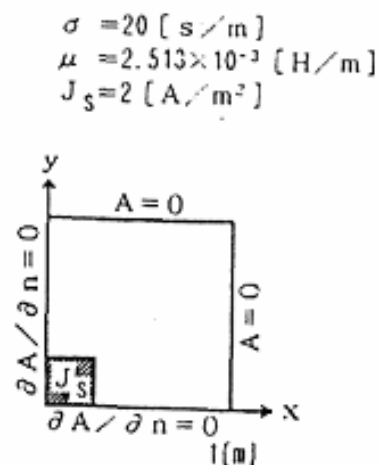


図 3.5.14

【例題】図 3.5.13 (a) に示すようなスロット中の静磁界分布について考える。この問題は

線形であるため、透磁率  $\mu$  は  $1[\text{H}/\text{m}]$ と正規化されている。平均的な解の収束性を示す Functional と節点数の関係を図 3.5.13 (b) に示す。また図 3.5.13 (c) に、スロット中のポテンシャル分布を示す。なお、比較のため図 3.5.13 (b) (c) 中にも三角形一次要素を使った有限要素法による結果も示してある。図 3.5.13 (b) から、Voronoi - Delaunay 変換法は従来の有限要素法よりも一桁近く少ない節点数で、有限要素法と同等の精度の結果を得ることが可能であることがわかる。さらに、図 3.5.13 (c) の結果は Voronoi - Delaunay 変換法が節点数 10 点であるにも拘らず、15 点の節点を使った有限要素法よりも高精度の結果を与えることを示している。

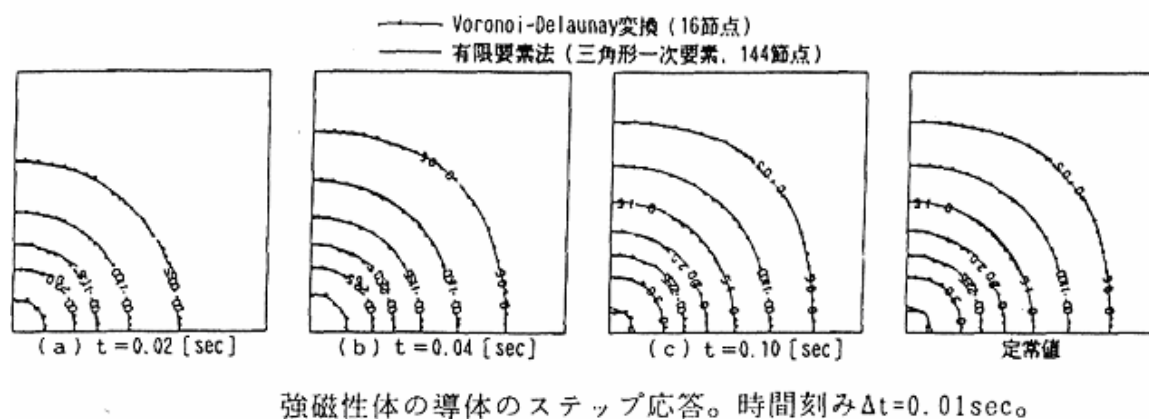


図 3.5.15

次にフェライトで作られた角形の磁性材料の中心部にステップの電流密度  $J_s$  が印加された場合の応答を動的な磁界系の例として取り上げる。図 3.5.14 にその解析モデルを示す。計算結果を図 3.5.15 に示す。尚、(3.5.58) 式の時間方向の離散化は台形法で行った。

図 3.5.15 の結果は、Voronoi- Delaunay 系の 16 節点のシステム方程式が、三角形一次要素を使った有限要素法の 144 節点のシステム方程式から得られる分布と同等の結果を与えることがわかる。

<c>まとめ ここでは、Voronoi- Delaunay 変換法が、従来の三角形一次要素を使った有限要素法よりも一桁程度少ないシステム方程式で同等の結果が得られることを、二次元の磁界系を中心として示した。Voronoi- Delaunay 変換法はスカラーポテンシャル問題や導波管の動作モード解析にも同様に適用できることを付記しておく。

## 練習問題

- [1]Voronoi の多角形と Delaunay の三角形の関係を述べなさい。
- [2]Voronoi の多角形と Delaunay の三角形の構成する局所直交座標系とは何か、説明しなさい。
- [3.]四辺形要素では必ずしも解が一意的に決まらない場合があることを局所直交座標系を用いて説明しなさい。
- [4]局所直交座標系で四辺形要素の補間関数はどのような性質を持つか、述べなさい。
- [5]Primal 系の補間関数を求めなさい。
- [6]Primal 系の補間関数はどのような境界条件を満足するか、述べなさい。
- [7]Complementary 系の補間関数を求めなさい。
- [8]Complementary 系の補間関数はどのような境界条件を満足するか、述べなさい。
- [9]局所一次元化法とはなにか、述べなさい。
- [10]局所一次元化法によって、Helmholz の方程式に対する Delaunay 系のシステム方程式を図 4.5.2 について導きなさい。
- [11]局所一次元化法によって、Helmholz の方程式に対する Voronoi 系のシステム方程式を図 4.5.2 について導きなさい。
- [12]図 4.5.3.に示す節点 1,2,3.に対する Delaunay 系のシステム方程式を導きなさい
- [1.2]図 4.5.4 に示す節点 1,2,3.に対する Voronoi 系のシステム方程式を導きなさい。
- [1.3.]図 4.5.5 に示すように右側の三角形の面積が零となり、右側が対称境界となった場合、節点 1 に対する Delaunay 系の節点方程式はどのようなになるか。
- [1.4]図 4.5.6 に示すように右側の三角形の面積が零となり、右側が対称境界となった場合、節点 1 に対する Voronoi 系の節点方程式はどのようなになるか。
- [1.5]Laplace の方程式に対する Delaunay 系のシステム方程式は三角形一次要素の有限要素法と同一となることを具体的な例をあげて示しなさい。
- [1.6]Laplace の方程式に対する Voronoi 系のシステム方程式を具体的な例をあげて導きなさい。
- [18]図 4.5.9 に示されている例題で、Delaunay 系に対する汎関数の値を求めなさい。
- [19]図 4.5.10 に示されている例題で、Voronoi 系に対する汎関数の値を求めなさい。
- [20]図 4.3.7 の角形強磁性体にステップ状の均一電流密度が印加された場合の例題で、Delaunay 系の解答が正しいかどうか確認しなさい。
- [3..1]図 4.3.7 の角形強磁性体にステップ状の均一電流密度が印加された場合の例題で、Voronoi 系の解答が正しいかどうか確認しなさい。
- [22]図 4.3.9 に示す導波管で TMmode に対する Delaunay 系の例題の解答が正しいかどうか確認しなさい。
- [23.]図 4.3.9 に示す導波管で TMmode に対する Voronoi 系の例題の解答が正しいかどうか確認しなさい。

[24]FEM と Primal 系の誤差は常に大きめにでる（これを Upper Bounded Solution と呼ぶ）のはなぜか、汎関数を使って説明しなさい。

[25]Complementary 系の誤差は常に小さめである（これを Lower Bounded Solution と呼ぶ）のはなぜか、汎関数を使って説明しなさい。

### 3.6 まとめ

本章では、電磁気学で遭遇する偏微分方程式を数値的に解く代表的な手法である有限要素法の中で最も初歩的な三角形一次要素を説唱した。具体的な例題として、静的な電界系から固有値問題まで計算機を使わなくても解ける例題を取り上げた。丁寧に例題を自分で解けば有限要素法の概念が把握できると思います。有限要素法の汎用プログラムを使って研究・開発を行う場合、有限要素法がよく解らなくても適当にメニューに従っていればとにかく答えは得られる。このようにして得られる答えをそのまま信用していいものだろうか、極めて疑問である。特に、境界条件等をいい加減に設定して解れた結果がそのまま研究発表に採用される場合もある。そもそも、境界条件そのものが理解されていない場合もある。このような問題点の多くはプログラムに問題があるのではなく、ユーザーの有限要素法に対する知識不足にある。有限要素法の原理を理解して、有限要素法の適用限界等を把握して汎用プログラムは使われるべきである。また、将来自分で有限要素法のプログラムを開発しようとする方々は、有限要素法の理論と具体的プロセスは本稿で理解できるが、他に具体的なプログラムの構成法や行列計算の技法等に関する文献を読まれることをお勧めする。有限要素法の理論面に興味のある方は従来の文献の多くが極めて抽象的・数学的な理論か計算過程の技法に偏っているのに対し、本稿では双反変分原理や Voronoi- Delaunay の離散化法等の具体的な例題を与えたので抽象的でなく理解できたことを期待する。磁界や電界が無限遠点にまで到達する開境界条件の導入法については Helmholtz の定理を用いれば厳密に解決できることを述べた。さらに、やや高度な方法である Voronoi- Delaunay 変換に付いてもふれた。いずれにしろ、ある程度有限要素法の基礎が身に付くことを期待する。



## 参考文献

- [1]P.P.Silvester and R.L.Ferrari, Finite elements for electrical engineers.Cambridge University Press 1983.
- [2]P.Hammond, Energy methods in electromagnetism, Oxford University Press 1981.
- [3.]P.P.Silvester,et al., "Exterior finite elements for 2- dimensional field problems with open boundaries, "Proc.IEE.Vo.124,No.12,pp- 1267,(1977)
- [4]H.Hurwitz,jr., "infinitesimal scaling - A new procedure for modeling exterior field problems,"IEEE Trans.Magn.,Vol.MAG-20, No.5,pp- 1918, (1984)
- [5]P.Bettes, "Infinite elements,"Int.J.Num.Meth.Engmg.,Vol.11,pp- 53., (1977)
- [6]M.V.K.Chari, "Electromagnetic field computation of open boundary problems by a semi-analytic approach." IEEE Trans.Magne.,Vol.MAG-23..No.5, pp.4.566,(1987)
- [7]C.A.Brebbia,Editor, Progress in boundary element methods, Vol.1 (Pentech Press Ltd.,1981)
- [8]G.Meunier,et al., "Hybrid finite element boundary element solutions for three-dimensional scalar potential problems," IEEE Trans.Magn., Vol. MAG-22,No.5,pp- 1040,(1986)
- [9]Y.Saito,et al., "Finite element solution of open boundary magnetic field problems," IEEE Trans.Magn.,Vol.MAG-23..No.5,pp- 4.569, (1987)
- [10]Y.Saito,et al., "The strategic dual image method- An extremely simple procedure for open field problem, "J.Appl.Phys.,63. (8) ,pp- 4.3...66, (1988)
- [11]J.Penman,et al., "Complementary and dual energy finite element principles in magnetostatics," IEEE Trans.Magn.,Vol.MAG-18.No.2,pp- 3.19,(1982)
- [12]P.Hammond,et al., "Dual finite element calculations for static electric and magnetic fields," Proc.IEE,Pt,A,Vol.120.No.3.,pp.105 (1983.)
- [13]Y.Saito,et al., "Faster magnetic field computation using locally orthogonal discretization,"IEEE Trans. Mag.,Vol.MAG-22.No.5,pp.1057 (1986)
- [14]Y.Saito,et al., "Modeling of magnetization characteristics and faster magnetodynamic field computation," J.Appl.Phys., 63. (8) ,pp- 3.1.64,(1988)
- [15]池口修一、他、 "Voronoi- Delaunay 離散化法による電磁界計-Voronoi- Delaunay 相互変換 -, ”電気学会マグネティックス研究会資料、Vol.MAG-88-1.3.8 (1988 年 8 月 4 日)

## 付録

## 磁化特性の表現法と磁性体の解析

## 基礎方程式

磁性体において、磁界  $\mathbf{H}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、さらに磁化  $\mathbf{M}$  の関係は(1)式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (1)$$

$\mu_0$  は真空中の透磁率である。(1)式は磁性体の比透磁率  $\mu_r$  を次式

$$\mu_r = \left( 1 + \frac{\mathbf{M}}{\mu_0 \mathbf{H}} \right) \quad (2)$$

で導入することで、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \\ &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3)$$

と書くことができる。

(3)式で、過去の磁気履歴と無関係に磁束密度  $\mathbf{B}$  と静的な磁界  $\mathbf{H}_s$  の関係が一意的に決まる静的な系を考えると、次式が成り立つ。

$$\mathbf{H}_s = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (4)$$

次に、時間変化をともなう磁界系を考える。(1)式を時間  $t$  に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left[ \frac{\mathbf{M}}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \\ &= \left( \mu_0 + \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left( \frac{\mathbf{M}}{\mathcal{H}} \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

の関係が得られる。磁束密度の時間変化率は単位面積当たりの電圧である。従って、(5)式の右辺第1項は磁界の時間変化による起電力であり、いわゆる、変圧器誘起電圧に相当する。他方、(4)式の第2項は、磁性体が有限長であり、 $x$  方向に均一に磁化される場合、磁化ベクトルが位置  $x$  に対して時間変化するために誘起する速度誘起電圧に相当する。

いま、速度  $dx/dt$  が充分小さく、無視できる大きさとしよう。このとき、(5)式から、

$$\mu_s = \frac{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} = \mu_0 + \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} \quad (6)$$

が成り立つ。 $\mu_d$  は微分透磁率である。(6)式を使って、(5)式から磁化の時間変化に起因する磁界  $\mathbf{H}_d$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_d &= \frac{1}{s} \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial t} \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_d \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]\end{aligned}\quad (7)$$

で与えられる。(7)式で導入したパラメータ  $s$  は  $\Omega/\text{m}$  の次元を持ち、ヒステリシス係数と呼ばれる。

さて、(4)式は磁化  $\mathbf{M}$  が時間変化しない静的な磁界  $\mathbf{H}_s$  を与え、(7)式は磁化  $\mathbf{M}$  の運動に起因する磁界  $\mathbf{H}_d$  を与えるから、両者の磁界が同時に存在する一般的な場合の磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d \\ &= \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_d \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]\end{aligned}\quad (8)$$

となる。

(8)式はチュア(Chua)型磁化特性モデルと呼ばれる。

#### 応用例

(8)式の具体的な応用例として、図1のトロイダルコアにおける電流  $i$  と磁束鎖交数  $\lambda$  の関係を計算する。

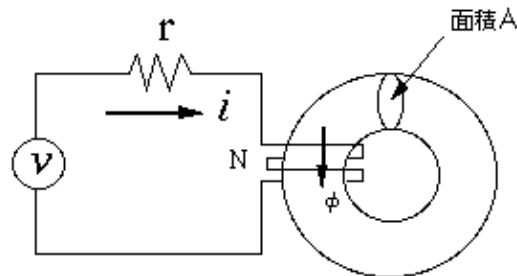


図1.トロイダルコア

図1のトロイダルコアは平均断面積、平均磁路長、巻き数、コイルの抵抗を、それぞれ  $A$ 、 $D$ 、 $N$ 、 $r$  とする。

(8)式の両辺を磁路に沿って積分すると、

$$\int_0^D \mathbf{H} d\ell = \int_0^D \frac{\partial \mathbf{B}}{\mu} d\ell + \int_0^D \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_d \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] d\ell\quad (9)$$

であるから、各項は以下のように電流  $i$  と磁束  $\lambda$  を使って書ける。但し、この例では透磁率  $\mu$  とヒステリシス係数  $s$  はコア全体で等しく一定とする。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\phi} \mathbf{H} d\lambda &= Ni \\
\int_0^{\phi} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\lambda &= \frac{D}{\mu A} \phi \\
\int_0^{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\mathbf{B}}{d\lambda} d\lambda &= \frac{D}{sA} \frac{d\phi}{dt} \\
\int_0^{\phi} \frac{\mu_g}{s} \frac{d\mathbf{H}}{d\lambda} d\lambda &= \frac{\mu_g}{s} N \frac{di}{dt}
\end{aligned}
\tag{10}$$

(10)式中の電流  $i$  とその時間微分  $di/dt$  は

$$\begin{aligned}
i &= \frac{1}{r} \left[ v - N \frac{d\phi}{dt} \right] \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[ v - N \frac{d\phi}{dt} \right]
\end{aligned}
\tag{11}$$

と書ける。(11)式と磁束鎖交数  $\lambda (=N\phi)$  を(9)式へ代入し、整理すれば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \left[ v - \frac{d\lambda}{dt} \right] + \frac{1}{r} \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt} \left[ v - \frac{d\lambda}{dt} \right] &= \frac{D}{\mu AN^2} \lambda + \frac{D}{sAN^2} \frac{d\lambda}{dt} \\
&= \frac{\lambda}{L} + \frac{1}{R} \frac{d\lambda}{dt}
\end{aligned}
\tag{12}$$

となる。 $L$  と  $R$  はトロイダルコアのインダクタンスと鉄損を表す等価抵抗である。さらに、(12)式左辺の第2項は印加電圧  $v$  と逆起電力  $d\lambda/dt$  間の電位差の時間微分に比例するから、等価キャパシタンス  $C$  を

$$C = \frac{1}{r} \frac{\mu_g}{s}
\tag{13}$$

とすれば、(12)式は

$$\frac{v}{r} + C \frac{dv}{dt} = \frac{\lambda}{L} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \frac{d\lambda}{dt} + C \frac{d^2\lambda}{dt^2}
\tag{14}$$

となる。

(14)式を磁束鎖交数  $\lambda$  について解き、 $\lambda$ - $i$  ループを描いた例を図 2a と 2b に示す。図 2a は線形問題として解いた場合であり、 $\lambda$ - $i$  ループは楕円で近似されている。図 2b は、透磁率  $\mu$  が図 3 に示す飽和曲線から決まるとした非線形計算結果であり、 $\lambda$ - $i$  ループが実際に観測される形状となっていることがわかる。

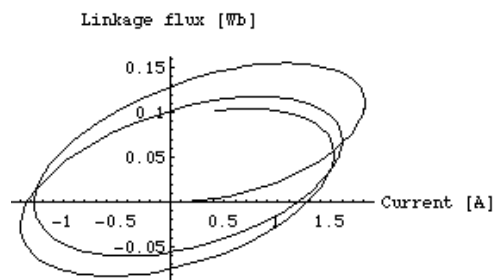
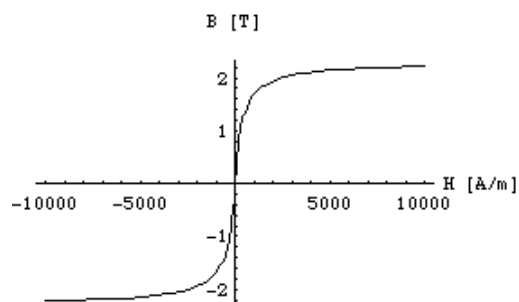
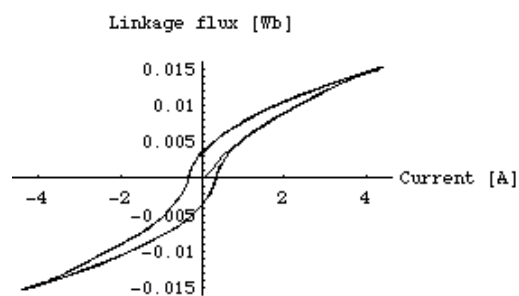
図 2a. 線形モデルによる  $\lambda$ - $i$  ループの例

図 2b. 計算に用いた B-H 曲線

図 2c. 非線形モデルによる  $\lambda$ - $i$  ループの例

### トロイダルコアの Mathematica Code

Mathematica packages

```
<<Utilities`MemoryConserve`;
$MemoryIncrement;
Off[General::spell,General::spell1,
    MemoryConserve::start,MemoryConserve::end];
```

線形モデル

- ・ コアの諸定数を定義する。

```
myu0=4.0 3.141592 0.0000001;
```

```
myu=500. myu0;dmyu=50. myu0;paraS=0.1;
```

```
areaS=0.0001;magLeng=0.28;turnN=800.;eleR=10.0;
```

・インダクタンス、等価鉄損抵抗、キャパシタンス等を定義する。

```
inducL=(myu areaS/magLeng) (turnN^2);
```

```
equivR=(paraS areaS/magLeng) (turnN^2);
```

```
equivC=dmyu/(paraS eleR);
```

・角周波数、電圧、計算終了時刻等を定義する。

```
freQ=50.0;
```

```
omega=2. 3.141592 freQ;
```

```
lasttime=2.5/freQ;
```

```
inpV[t_]:=Sqrt[2.] 30. Sin[omega t];
```

```
inpdV[t_]:=omega Sqrt[2.] 30. Cos[omega t];
```

```
input[t_]:= (inpV[t]/eleR)+equivC inpdV[t];
```

・ (14) 式を解く。

```
solution=
```

```
NDSolve[
```

```

      {ramuda''[t] equivC+
      ramuda'[t] ((1./equivR)+(1./eleR))+
      (ramuda[t]/inducL)==input[t],
      ramuda[0]==0,ramuda'[0]==0
      },
      {ramuda},{t,0,lasttime},

```

```
      MaxSteps ->5000
```

```
]
```

```
88ramuda ® InterpolatingFunction@880., 0.05<<, <>D<<
```

・  $\mu$ -i ループを描く。

```
ParametricPlot[
```

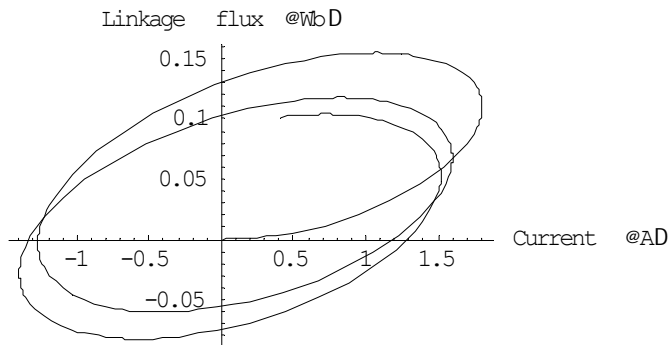
```
Evaluate[{(ramuda[t]/inducL)+(ramuda'[t]/equivR),
```

```
      ramuda[t]} /. solution],
```

```
      {t,0,lasttime},
```

```
AxesLabel->{"Current [A]","Linkage flux [Wb]"}]
```

```
];
```



非線形モデル

透磁率  $\mu$  が下図の B-H 曲線から与えられるとする。

```
myuFunc[h_]:=1./((0.1/myu)+Abs[(1/2.3) h]);
```

```
nonL[linkFlux_]:=
```

```
Block[{perm=myu0},
```

```
    fluxDen=linkFlux/(areaS turnN);
```

```
    hField=fluxDen/perm;
```

```
    perm=myuFunc[hField];
```

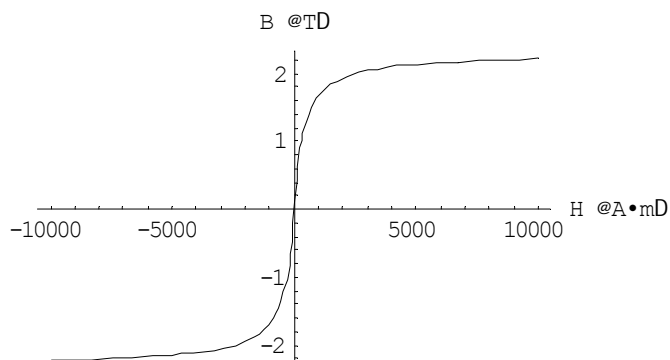
```
    perm (areaS/magLeng) (turnN^2)
```

```
];
```

```
Plot[h myuFunc[h],{h,-10000,10000},
```

```
    AxesLabel->{"H [A/m]","B [T]"}]
```

```
];
```



```
nsolution=
```

```
NDSolve[
```

```
{
```

```

ramuda'[t] equivC+
ramuda'[t] ((1./equivR)+(1./eleR))+
      (ramuda[t]/nonL[ramuda[t]])==input[t],
ramuda[0]==0,ramuda'[0]==0
},
{ramuda},{t,0,lasttime},
MaxSteps ->5000
]

```

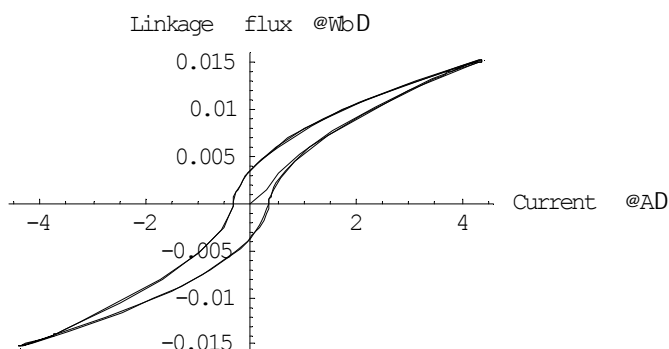
```
88ramuda ® InterpolatingFunction@880., 0.05<<, <>D<<
```

・  $\lambda$ -i ループを描く。

```
ParametricPlot[
```

```
Evaluate[{(ramuda[t]/nonL[ramuda[t])+(ramuda'[t]/
equivR),ramuda[t]} /. nsolution},{t,0,lasttime},
```

```
AxesLabel->{"Current [A]","Linkage flux [Wb]"}];
```



### 永久磁石を含む電気回路

基礎方程式

磁界  $\mathbf{H}$  が磁性体に加わっている場合の基礎方程式は(1)式で与えられる。さらに、(1)式は(8)式の形に書けることがわかっている。(8)式を書き直して、

$$\mathbf{H} + \frac{\mu_d}{s} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{1}{s} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (15)$$

を得る。

(15)式で、磁界の時間変化率  $d\mathbf{H}/dt$  がきわめて小さいとき、 $\mu_d/s$  の項がきわめて大きく、(15)式左辺の第2項は一定値  $H_c$  を取るとしよう。よって(15)式は



$$\mathbf{H} + \mathbf{H}_c = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{1}{s} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (16)$$

となる。

(16)式は永久磁石の磁化特性を表す構成方程式である。図1のトロイダルコアが保持力  $H_c$  を持つ永久磁石としよう。この永久磁石を含む系の電氣的な等価回路を導くことを考える。

(16)式で、

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi} \mathbf{H}_c d\lambda &= i_c \\ \int_0^{\phi} \mathbf{H} d\lambda &= Ni \\ \int_0^{\phi} \frac{\mathbf{B}}{\mu} d\lambda &= \frac{D}{\mu A} \phi \\ \int_0^{\phi} \frac{1}{s} \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\lambda &= \frac{D}{sA} \frac{d\phi}{dt} \\ i &= \frac{1}{r} \left[ v - N \frac{d\phi}{dt} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ v - \frac{d\lambda}{dt} \right] + i_c &= \frac{D}{\mu AN^2} \lambda + \frac{D}{sAN^2} \frac{d\lambda}{dt} \\ &= \frac{\lambda}{L} + \frac{1}{R} \frac{d\lambda}{dt} \end{aligned} \quad (17)$$

とすれば、永久磁石を含む系の電気回路は図4となる。

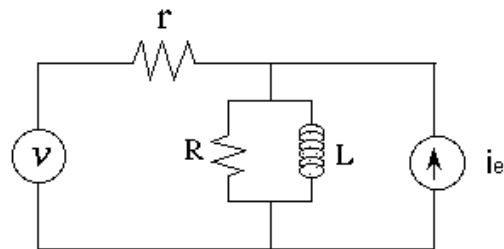


図4. 永久磁石を含む電気回路

計算例

図4の電気回路では、(17)式から

$$\frac{v}{r} + i_c = \frac{\lambda}{L} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right] \frac{d\lambda}{dt} \quad (18)$$

が成り立つ。

(18)式を磁束鎖交数  $\lambda$  について解き、 $i$ - $\lambda$  マイナーループを描いた例を図5に示す。図5は、透磁率  $\mu$  が図3に示す飽和曲線から決まるとした非線形計算結果であり、 $i$ - $\lambda$  ループが実際に観測される形状となっていることがわかる。残留磁気による磁束鎖交数は  $0.05[\text{Wb}]$  としている。

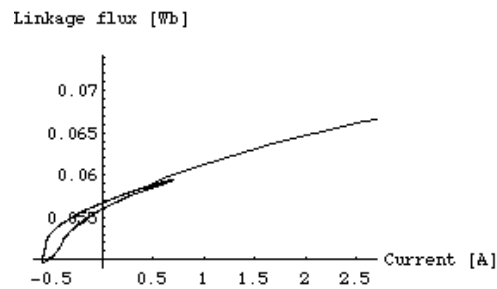


図 5. 永久磁石の動的磁化特性

### 永久磁石の Mathematica Code

非線形モデル

- ・ コアの諸定数を定義する。

```
myu0=4.0 3.141592 0.0000001;
myu=500. myu0;dmyu=50. myu0;paraS=0.1;
areaS=0.0001;magLeng=0.28;turnN=800.;eleR=10.0;
```

- ・ 等価鉄損抵抗を定義する。

```
equivR=(paraS areaS/magLeng) (turnN^2);
equivCurr=0.5;
```

- ・ 角周波数、電圧、計算終了時刻等を定義する。

```
freQ=50.0;
omega=2. 3.141592 freQ;
lasttime=2.5/freQ;
```

```
inpC[t_]:=Sqrt[2.] 5. Sin[omega t]/eleR;
```

- ・ 透磁率 $\mu$ が下図の B-H 曲線から与えられるとする。

```
myuFunc[h_]:=1./((1/myu)+Abs[(1/2.3) h]);

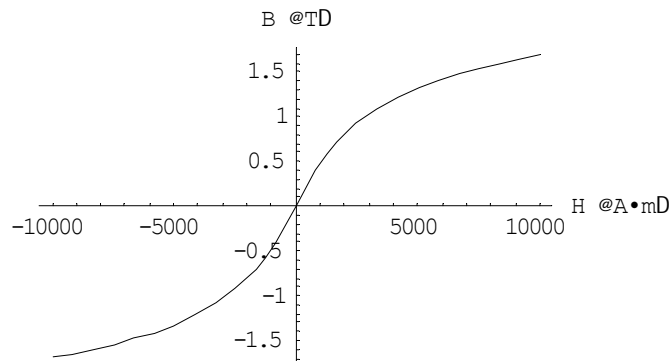
nonL[linkFlux_]:=
Block[{perm=myu0},
    fluxDen=linkFlux/(areaS turnN);
    hField=fluxDen/perm;
    perm=myuFunc[hField];
    perm (areaS/magLeng) (turnN^2)
];
```

```
Plot[h myuFunc[h],{h,-10000,10000},
```

```

AxesLabel->{"H [A/m]","B [T]"}
];

```



- ・磁束の初期値を決める。

```

hCoesive=equivCurr turnN/magLeng;
iramuda=myuFunc[hCoesive] hCoesive areaS turnN
0.0516506

```

- ・(18)式を解く。

```

nsolution=
NDSolve[
{
ramuda'[t] ((1./equivR)+(1./eleR))+
(ramuda[t]/nonL[ramuda[t]])==
ramuda[t]+equivCurr,
ramuda[0]==iramuda
},
{ramuda},{t,0,lasttime},
MaxSteps->5000
]
88ramuda® InterpolatingFunction@880., 0.05<<, <>D<<

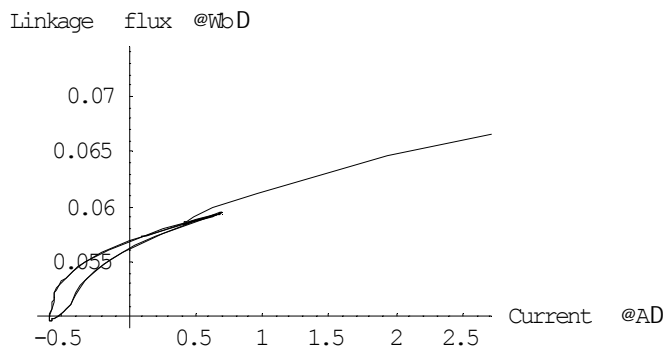
```

- ・ $\lambda$ -i ループを描く。

```

ParametricPlot[
Evaluate[{(ramuda[t]/nonL[ramuda[t]])+
(ramuda'[t]/equivR)-equivCurr,ramuda[t]+
iramuda} /. nsolution],
{t,0,lasttime},
AxesLabel->{"Current [A]","Linkage flux [Wb]"}
];

```



### 磁気回路の計算機シミュレーション

#### 基礎方程式

変位電流が無視できる準静的な電磁界は、以下のマクスウェル(Maxwell)の方程式

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}\end{aligned}\tag{19}$$

によって支配される。

これに電界と電流、および磁界と磁束密度の構成方程式

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \lambda \mathbf{E} \\ \mathbf{H} + \frac{\mu_s}{s} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{1}{s} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{20}$$

を追加して、磁性体を含む系の支配方程式を導こう。

まず、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0\tag{21}$$

であるから、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$  の条件を自動的に満足させるため、次式でベクトルポテンシャル (vector potential) を導入する。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\tag{22}$$

(22)式を(19)式に代入し、(20)式の構成方程式を勘案すれば、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{J} &= \lambda \mathbf{E} = -\lambda \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)\end{aligned}$$

(23)

なる関係が得られる。 $\psi$  は任意のスカラーポテンシャルであり、 $\nabla \times \nabla \psi = 0$  となるために導入された。

次に、(20)式の磁性体の構成方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt} \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \mathbf{J} + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt} \mathbf{J} \\ &= \left(1 + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \kappa \mathbf{E} \\ &= -\left(1 + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \kappa \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \psi\right) \end{aligned} \quad (24)$$

と変形される。

(24)式を整理して、磁性体を含む系の支配方程式は

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt} \nabla \times \mathbf{A} + \left(1 + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \kappa \nabla \psi \quad (25)$$

となる。

### 変分原理

簡単のため、線形な 2 次元の磁界系を考える。2 次元空間では  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  が成り立つから、(25)式は、線形な 2 次元の磁界系に対して

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \nabla^2 \mathbf{A} - \kappa \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \mathbf{A} &= \kappa \left(1 + \frac{\mu_g}{s} \frac{d}{dt}\right) \nabla \psi \\ \text{or} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \beta \mathbf{A} &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (26)$$

と変形される。

(26)式に対して、次の汎関数を考える。

$$F(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \alpha (\nabla \mathbf{A})^2 + \beta \mathbf{A}^2 + 2 \mathbf{A} \mathbf{f} \right] dt \quad (27)$$

(27)式の積分領域は 2 次元空間  $S$  である。この 2 次元空間で、(26)式に対して、 $\eta$  を数値パラメータ、 $\epsilon \eta$  を微分可能な誤差とする次の近似解を考える。

$$\mathbf{A}_{\text{approx}} = \mathbf{A} + \epsilon \eta \quad (28)$$

(28)式を(27)式に代入して、第 1 変分を取る。

$$\begin{aligned}
F(A_{approx}) &= \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \left[ \epsilon (\nabla A_{approx})^2 + \mu A_{approx}^2 + 2 A_{approx} f \right] dS \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \left[ \epsilon \nabla (A + \epsilon \eta)^2 + \mu (A + \epsilon \eta)^2 + 2(A + \epsilon \eta) f \right] dS \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \left[ \epsilon (\nabla A)^2 + \mu A^2 + 2 A f \right] dS + \epsilon \int_0^{\xi} \left[ \epsilon \nabla A \cdot \nabla \eta + \mu A \eta + \eta f \right] dS + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^{\xi} \left[ \epsilon (\nabla \eta)^2 + \mu \eta^2 \right] dS
\end{aligned} \tag{29}$$

であるから、第1変分は

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{F(A + \epsilon \eta) - F(A)}{\epsilon} \right] = \int_0^{\xi} \left[ \epsilon \nabla A \cdot \nabla \eta + \mu A \eta + \eta f \right] dS = 0 \tag{30}$$

となる。

こので、2次元のグリーン(Green)の定理は、 $\Gamma$  を面積  $S$  を囲む線分として

$$\int_0^{\xi} \nabla A \cdot \nabla \eta dS = - \int_0^{\xi} \eta \nabla^2 A dS + \int_0^{\xi} \eta \nabla A \cdot \mathbf{dl} \tag{31}$$

であるから、(30)式は

$$\begin{aligned}
\int_0^{\xi} \left[ \epsilon \nabla A \cdot \nabla \eta + \mu A \eta + \eta f \right] dS &= - \int_0^{\xi} \eta \left[ \epsilon \nabla^2 A - \mu A - f \right] dS + \int_0^{\xi} \eta \nabla A \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s} d\mathbf{l} = 0 \\
\text{or} \\
\epsilon \nabla^2 A - \mu A - f &= 0, \quad \int_0^{\xi} \eta \nabla A \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s} d\mathbf{l} = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

となる。

(32)式は(27)式の汎関数の第1変分を取ることによって、(26)式と同次ノイマン境界条件(homogeneous Neumann boundary condition)を自動的に満足することを意味する。

### 三角形1次要素を用いた汎関数

(26)式は、(27)式の汎関数へ(28)式の近似解を代入し、第1変分 $\delta F=0$ を取ることによって、満足されることがわかった。ここでは、図1に示すような三角形内で、近似解が

$$A = \alpha + b x + c y \tag{33}$$

なる  $x$  と  $y$  の1次関数で与えられるとしよう。

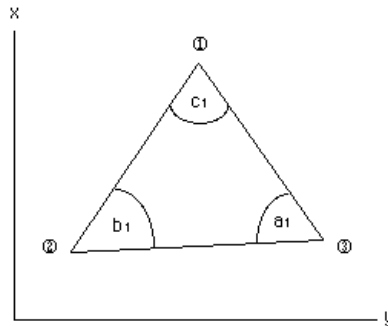


図1. 三角形1次要素

図1の三角形の頂点□、□、□座標をそれぞれ、 $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ とすれば、(33)式から、

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

が成り立つ。

(34)式を(33)式に代入して、

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i J_i$$

$$J_1 = \frac{1}{2\Delta_1} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$J_2 = \frac{1}{2\Delta_1} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$J_3 = \frac{1}{2\Delta_1} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

(35)

を得る。但し、 $\Delta_1$ は三角形の面積である。

(35)式で、

$$\nabla A = \sum_{i=1}^3 A_i \nabla J_i$$

であるから、汎関数は

$$\begin{aligned} F_1(A) &= \frac{\alpha_1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i \left[ \int_0^{A_1} \nabla J_i \cdot \nabla J_j dS \right] A_j + \frac{\beta_1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i A_j \int_0^{A_1} J_i J_j dS + \sum_{i=1}^3 A_i \int_0^{A_1} J_i f dS \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{X}_1 [\mathcal{S}_1 + \mathcal{T}_1] \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1^T \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_1 = \frac{\Delta_1 f}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{S}_1 &= \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} \cot \alpha_1 + \cot \beta_1 & -\cot \alpha_1 & -\cot \beta_1 \\ -\cot \alpha_1 & \cot \alpha_1 + \cot \gamma_1 & -\cot \gamma_1 \\ -\cot \beta_1 & -\cot \gamma_1 & \cot \beta_1 + \cot \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_1 = \beta_1 \frac{\Delta_1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。(36)式で、(26)式の非同次項  $f$  は一定値  $f_1$  としている。

通常、問題対象領域が1個の三角形で表現できないから、図2に示す2個の三角形を接合することを考えよう。

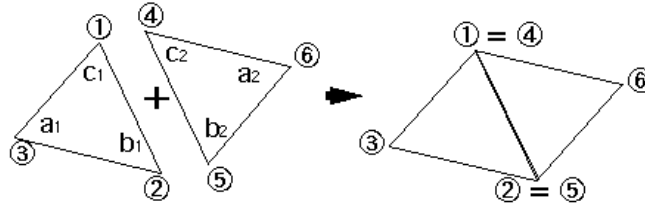


図 2. 2 個の三角形要素の接合

図 2 で、節点 1 と 4、2 と 5 がそれぞれ共通で等しくなるから、次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{X} \quad (37)$$

他方、三角形要素 1 と 2 の汎関数は、下添字 2 が図 2 の右側の三角形要素を示すとして、以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} F_1(A) \\ F_2(A) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

(38)式を(37)式の接続行列(connection matrix) $\mathbf{C}$  を使って線形変換し、ポテンシャル  $A_1$  と  $A_4$ 、 $A_2$  と  $A_5$  を等しくすれば、以下の合成した汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} F(A) &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \left[ \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \mathbf{C} \right] \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \left[ \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^T [\mathbf{S} + \mathbf{T}] \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{f} \\ \mathbf{f} &= \frac{\Delta_1 f_1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta_2 f_2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S} &= \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} \cot \alpha_1 + \cot \beta_1 & -\cot \alpha_1 & -\cot \beta_1 & 0 \\ -\cot \alpha_1 & \cot \alpha_1 + \cot \beta_1 & -\cot \beta_1 & 0 \\ -\cot \beta_1 & -\cot \alpha_1 & \cot \alpha_1 + \cot \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{2} \begin{bmatrix} \cot \alpha_2 + \cot \beta_2 & -\cot \alpha_2 & 0 & -\cot \beta_2 \\ -\cot \alpha_2 & \cot \alpha_2 + \cot \beta_2 & 0 & -\cot \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cot \beta_2 & -\cot \alpha_2 & 0 & \cot \alpha_2 + \cot \beta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T} &= \sqrt{\frac{\Delta_1}{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{\Delta_2}{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (39) \end{aligned}$$



システム方程式

(39)式によって三角形 1 次要素を使った汎関数が得られた。この汎関数の第 1 変分(極値、extremum) を取ることによって解くべきシステム方程式を導こう。

まず、行列に関する微分公式

$$\frac{d}{d\mathbf{X}}[\mathbf{X}^T D \mathbf{X}] = D \mathbf{X} + D^T \mathbf{X}, \quad \frac{d}{d\mathbf{X}}[\mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = \mathbf{Y} \quad (40)$$

を勘案して、(39)式をベクトル  $\mathbf{X}$  に関して微分してゼロとおく。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{X}} F(A) &= \frac{d}{d\mathbf{X}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{X}^T [\mathcal{S} + T] \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{f} \right) \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{S} + T] \mathbf{X} + \frac{1}{2} [\mathcal{S} + T]^T \mathbf{X} + \mathbf{f} \\ &= [\mathcal{S} + T] \mathbf{X} + \mathbf{f} \\ &= 0 \end{aligned}$$

or

$$[\mathcal{S} + T] \mathbf{X} = -\mathbf{f} \quad (41)$$

(41)式が解くべきシステム方程式となる。このシステム方程式は同次ノイマン境界条件(対称境界条件)を自動的に満足する。ディクレイ(Dirchlet)型境界条件、すなわち、固定境界条件は各節点にポテンシャル値を入れて、(41)式を変形して解けば解が得られる。このようにして解を得る方法は三角形 1 次要素を使った有限要素法(first order finite element solution)とよばれる。

計算例

図 3 の正方断面を持つ磁性体に均一に分布した交流電流  $J$  が通電されている場合、磁性体内の  $B$ - $H$  ループを計算しよう。但し、磁性体の磁気飽和特性を無視した線形モデルで解析を行う。

この問題の支配方程式は(26)式で、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ として、

$$\left( \frac{1}{\mu} + j\omega \frac{\mu_g}{s} \right) \nabla^2 A - \left( j\omega - \omega^2 \frac{\mu_g}{s} \right) A = - \left( 1 + j\omega \frac{\mu_g}{s} \right) J \quad (42)$$

となる。境界条件は磁性体境界上の節点ポテンシャルはすべてゼロの固定境界とする。図 4a、b および c に図 3 中に示す位置□、□、□における縦方向の磁束密度と磁界の関係を  $B$ - $H$  ループで示す。

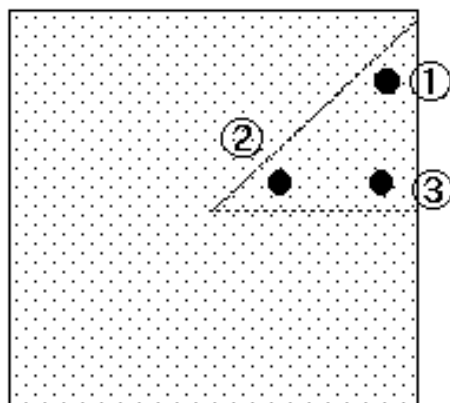


図 3. 正方形断面を持つ磁性体

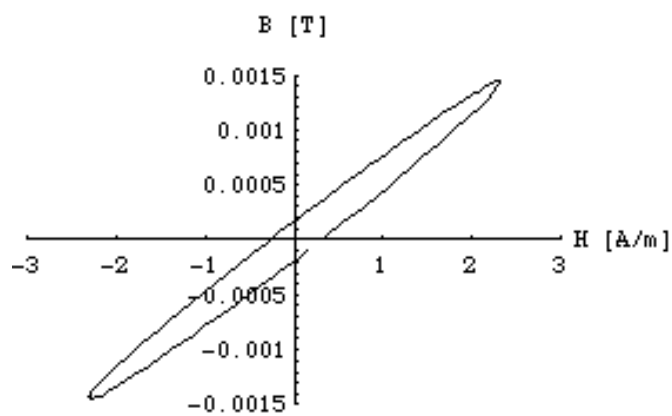


図 4a. □の B-H ループ

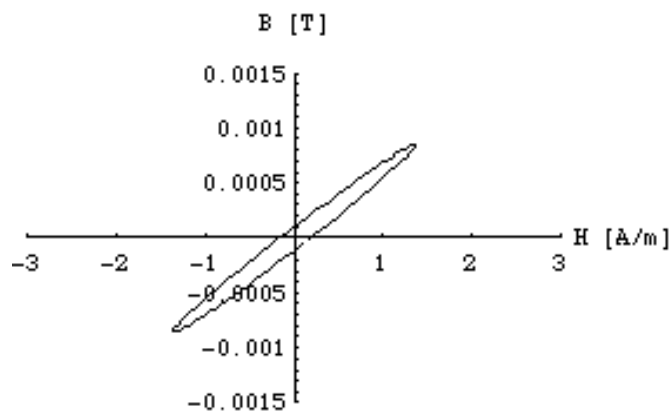


図 4b. □の B-H ループ

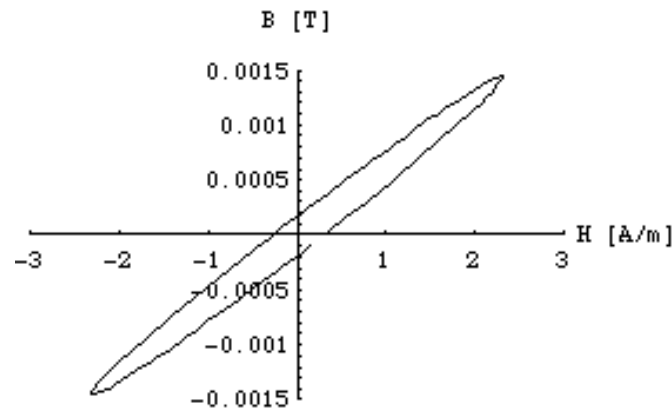


図 4c. □の B-H ループ

### 有限要素法の Mathematica Code

線形モデル

- ・ 磁性体の諸定数を定義する。

```
myu0=4.0 3.141592 0.0000001;
```

```
myu=500. myu0;dmyu=50. myu0;paraS=0.0001;
```

```
f=50.0;=2.0 3.141592 f;
```

```
kapper=1.0 10^6;
```

```
deltaL=0.005;=deltaL deltaL/2.;
```

```
jAmp=1000.0;
```

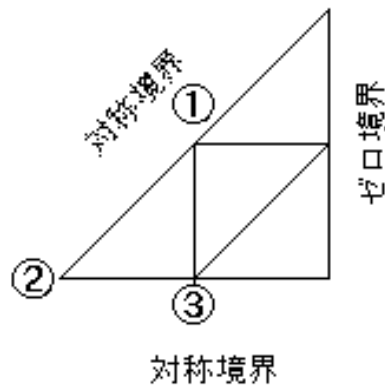
- ・ 係数および入力関数を定義する。

```
coef1=(1/myu)+omega (dmyu/paraS)I;
```

```
coef2=-kapper ((omega)I-(dmyu/paraS) omega^2)*  
(deltaS/12.);
```

```
inFunc[t_]=-(1.0+(omega)I) jAmp Exp[(omega)I t];
```

- ・ 図 3 の正方形断面の磁性体では、対称性から同図中の三角形領域のみについて解けばよいから、三角形領域を図 4 に示す要素に分解する。



- ・ (41)式の S 行列をつくる。

```
sMatrix=coef1 {{2.,0.,-1.},{0.,0.5,-0.5},{-1.,-0.5,2.}};
```

- ・ (41)式の T 行列をつくる。

```
tMatrix=coef2 {{6.,1.,2.},{1.,2.,1.},{2.,1.,6.}};
```

- ・ (41)式の入力ベクトル f をつくる。

```
fVector[t_]=inFunc[t] {deltaS,deltaS/3.,deltaS};
```

- ・ S+T 行列の逆行列 Y を計算する。

```
inverseMatrix=Inverse[sMatrix+tMatrix];
```

- ・ 複素解ベクトル X を計算する。

```
vectorX[t_]=inverseMatrix.fVector[t];
```

- ・ 1 周期分の解を計算する。

```
solution=Table[vectorX[t],{t,0,1/f,0.01 1/f}];
```

- ・ 図 3 で、点 1,2,3 の磁束密度を計算する。

$$\nabla \times \mathbf{A}_z = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

$$= \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$$

であるから、B 成分を計算する。

```
fluxD1=Table[0.0,{100}];
```

```
fluxD2=Table[0.0,{100}];
```

```
fluxD3=Table[0.0,{100}];
```

```
Do[
```

```
(
  fluxD1[[i]]=(0.0-solution[[i,1]])/deltaL;
  fluxD2[[i]]=(solution[[i,2]]-solution[[i,3]])/deltaL;
  fluxD3[[i]]=(0.0-solution[[i,3]])/deltaL
),{i,100}
```

となる。

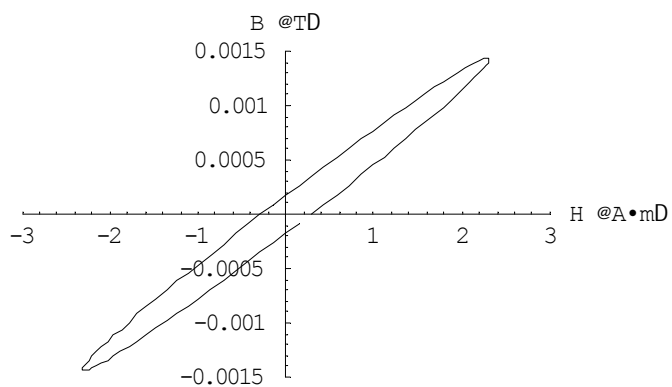
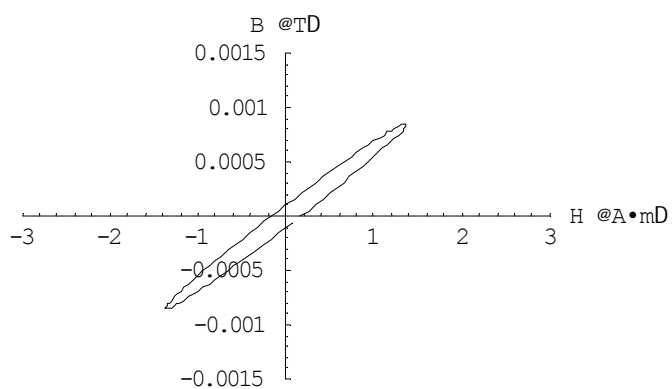
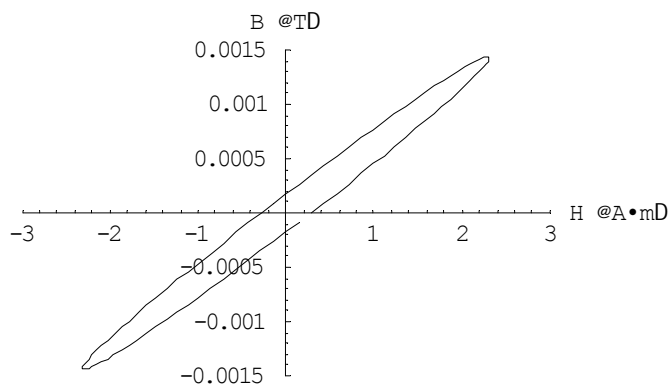
x 方向の磁界は

```
hField1=Table[0.0,{100}];
hField2=Table[0.0,{100}];
hField3=Table[0.0,{100}];
Do[
    (
        hField1[[i]]=coef1 fluxD1[[i]];
        hField2[[i]]=coef1 fluxD2[[i]];
        hField3[[i]]=coef1 fluxD3[[i]]
    ),{i,100}
];
```

で与えられる。

各点の B-H ループを描く。

```
bhLoop1=Table[{Re[hField1[[i]]],Re[fluxD1[[i]]]}, {i,100}];
bh1=ListPlot[bhLoop1,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"H [A/m]", "B [T]"},
PlotRange->{{-3,3},{-0.0015,0.0015}}];
bhLoop2=Table[{Re[hField2[[i]]],Re[fluxD2[[i]]]}, {i,100}];
bh2=ListPlot[bhLoop2,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"H [A/m]", "B [T]"},
PlotRange->{{-3,3},{-0.0015,0.0015}}];
bhLoop3=Table[{Re[hField3[[i]]],Re[fluxD3[[i]]]}, {i,100}];
bh3=ListPlot[bhLoop3,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"H [A/m]", "B [T]"},
PlotRange->{{-3,3},{-0.0015,0.0015}}];
```



```
NotebookSave[];
```

```
Quit[];
```

#### 付録参考文献

- ・電気学会マグネティクス技術委員会編、「磁気工学の基礎と応用」、(コロナ社),1999年5月

## 第4章 逆問題と不適切な線形システム

### 4.1 逆問題とは

#### 4.1.1 逆問題の分類

自然科学は、自然界で起こる様々な現象を単純な個々の現象に分解し観察することで特定の事物間の規則性を見だし、見いだされた規則性の中で普遍的に成り立つ規則を抽出しその因果関係を明らかにして法則を導くことが大きな役割である。また、特定の事物間で成り立つ法則を組み合わせてより複雑な現象全体の因果関係を明らかにすることも自然科学の役割である。

単純な法則の一例として、電流が流れている直線状の導線を磁界が円周状に取り囲む現象を考える。いわゆるアンペア (Ampere) の法則である。さて、導線が直線ではなく複雑なループや変曲点を有する形状であるとき、導線中の電流と導線の周辺磁界間の関係はどのような形で表されるであろうか？通常、このような問題は、まず、最初に導線の形状とそれを流れる電流が既知情報であるとして、導線の周辺磁界分布を電流の関数として求めることに帰する。では逆に、導線の周辺磁界分布を既知情報として、電流を磁界の関数として求める解析がなされなかったものであろうか？答えは簡単である。電流は導線から漏れること無く容易に測定や制御が可能であるのに対して、導線の周辺磁界は無限遠点にまで広がり容易に全ての磁界分布が測定出来ないことに起因する。この例から明らかのように、多くの自然科学の方法論は測定と制御が容易な変数を既知情報とし、測定と制御が困難な変数を未知情報として求める形式で展開される。このような考え方で定式化される問題を順問題(regular or forward problem)と呼ぶ。言い換えれば、情報源と情報伝達法則を前提として局所的情報を求める問題が順問題である。この順問題解析は、情報源と情報伝達に関する法則が既知であるから結果が一意的に決まり、既に完成した機器や装置等の特性を解析する極めて有効な手段として活用される。しかし、局所的情報を前提とする機器や装置の設計に適用するには多くの試行錯誤的な反復が必要となり、極めて非能率的手段となる。

**順問題: 情報源 + 情報伝達の法則 → 局所的情報**

もし、前述の例で仮に磁界が容易に測定・制御可能であればおそらく電流が磁界の関数として表現されることとなったであろう。しかし、実際は空間中に分布する全磁界を測定することが不可能であるため、局所的な磁界分布から一意的な電流やコイル形状を求めることは困難であろう。このように局所的情報から情報源を求める問題を源推定に関する逆問題(Inverse source problem、以下 IS 問題と略記)と呼ぶこととしよう。

**源推定に関する逆問題: 局所的情報 + 情報伝達の法則 → 情報源**

この源推定に関する逆問題解析は、電磁石や電動機等の電気機器内で所望の磁界分布からどのように電流を通電するコイルや磁路を構成すればよいかを決める設計問題に対しては極めて有効であろう。また、周辺へ放射電磁界を最小にする PCB(printed circuit board)基板の回路設計にも有効であろう。問題は情報が局所的であるため、解が一意的に決まらない点にある。

他方、情報源と局所的情報が与えられ、情報伝達の法則を探索する問題が考えられる。この情報源と局所的情報間を司る法則、すなわち、情報源と局所的情報間の因果関係を探索する逆問題を規則推定に関する逆問題(inverse rule problem、以下、IR 問題と略記)と呼ぶ。

### 規則推定に関する逆問題: 情報源 + 局所的情報 -> 情報伝達の規則

例えば、ある電流素片が周辺へ与える磁界間の因果関係を探索する問題などが典型的な電流と磁界間の規則推定に関する逆問題であり、ビオサ・バールの法則は試行錯誤の結果導かれたこの IR 問題に対する解である。すなわち、規則推定に関する逆問題は経験的・実験的結果から導かれる法則を系統的に求める逆問題である。

しかしながら、多くの自然科学の法則は、単に情報源と局所的情報間の幾何学的定数（例えば距離など）のみならず空間を占める媒質の性質に依存する。たとえば、真空中で、電流素片が与える任意の点における磁界はビオサ・バールの法則によって求められる。しかし、電流素片と磁界間に磁性体が存在する場合、単純にビオサ・バールの法則から磁界は求められない。したがって、電流素片と磁界間が真空中で占められる場合と磁性体で占められる場合の比較から磁性体の性質を探索する逆問題が考えられる。このように情報源、局所的情報さらに情報伝達の基本法則が与えられ、情報伝達経路を構成する媒質を探索する問題を媒質推定に関する逆問題(inverse-parameter-problem,以下 IP 問題と略記)と呼ぼう。

### 媒質推定に関する逆問題: 情報源 + 局所的情報 + 情報伝達の基本法則-> 媒質

媒質推定に関する逆問題は、磁性体の磁化特性、誘電体の誘電率さらに電気導電率などを測定する計測技術に他ならない。

#### 逆問題

- ・ 源推定に関する逆問題: 局所的情報+情報伝達の法則 -> 情報源
- ・ 規則推定に関する逆問題: 情報源+局所的情報 -> 情報伝達の規則
- ・ 媒質推定に関する逆問題: 情報源+局所的情報+情報伝達の基本法則-> 媒質

本書は、従来の解析技術が測定や制御が容易な物理量を既知情報とし、測定が困難な物理量を未知情報として求める問題、すなわち 順問題を前提としているのに対し、測定や



制御が比較的困難である局所的情報から情報源、情報と情報源間の規則性、そして空間媒質のパラメータ等を近似的であれ推定せんとする問題、すなわち 逆問題について述べる逆問題入門書である。換言すれば、従来の自然科学は出来上がった系や各種機器内の情報を解析・分析する方法論を追求するために展開されている。これに対し、特定の情報から、系や各種機器全体をおおまかであれ、どのように設計すべきか、情報と情報源間の因果関係や材料の性質などを系統的に探査する方法論を模索するのが本書の目的である。このような意味から、本書で述べる考え方、解釈そして方法論が全てでは無く、また必ずしも唯一の逆問題の捕らえ方でもない。あくまでも筆者の限られた知識に基づく独断と偏見に満ちた内容となることを容認して頂きたい。

#### 4.1.2 逆問題の歴史

逆問題的発想の原点はおそらく 1823 年に N.H.Abel が考えたスロープ形状推定問題が最初であろう。スロープ形状推定問題とは、既知質量を持つ粒子を摩擦の無い未知形状のスロープに初速を変えて投げ、投げた点に戻るまでの時間を計測し、スロープの形状を求めようとするものである。この問題は Abel の積分方程式の定式化につながり、スロープの形状を求めることに成功した。しかしながら、スロープの形状が凹凸を持つ複雑な形状であるとき、単純に既知質量を持つ粒子の初速を変えて投げ、投げた点に戻るまでの時間計測では、解すなわち、スロープの形状は一意的に求まらないことも 1976 年に J.B.Keller によって証明されている[1]。この問題は複雑なスロープを単純なスロープに分解し、個々の単純なスロープを Abel の積分方程式から求め、全体の結果から複雑なスロープ形状を求めれば解けることが容易に理解できるであろう。換言すれば既知質量を投げる出発点と方向を適切に選択すれば複雑なスロープ形状も一意的に求められることを意味する。このように空間の形状や媒質等のスカラー量を求める問題は、入力と出力間の情報が理想的に得られれば解は一意的に決まることが証明できる。

既知質量と初速が情報源、摩擦のないスロープと位置エネルギーの関係が情報伝達に関する基本法則となるから、Abel の問題は媒質の形状を求める IP 問題と考えらる。IP 問題は、一連の局所的情報が得られれば一意的な解の存在が証明でき、実用化されている応用の代表例として CT(computed tomography)がある。1917 年数学者 Radon が二次元物体の形状が対象の全周辺の投影データから一意的に求められることを数学的に証明した。いわゆる Radon 変換である。その後、X線や RI(ラジオアイソトープ)を用いた 1961 年の Oldendorf や 1963 年の Kuhl の実験結果に基づいて Hounsfield と Anbrose が CT の実現に成功し、ノーベル賞に輝いたことは記憶に新しい[2]。

他方、100 年以上の歴史を持つ逆問題として地球表面上の重力分布測定から地球の密度を求める問題がある。この問題は重力源となる地球密度を局所的な重力分布から求める IS 問題である。この IS 問題に対して、1867 年の G.G.Stokes、1875 年の G.V.Schiaparelli、1906 年の C.Neumann 等は、地球内部の重力分布測定が不可能であるため解は一意的に求めることがで

きず多くの曖昧さを含むこととなる、との結論を示した[1]。このことを簡単な静磁界系の例を取り上げて説明しよう。いま、電流密度  $\mathbf{J}$  の分布を周辺磁界  $\mathbf{H}$  の測定から求める IS 問題を考える。電流密度  $\mathbf{J}$  が存在しない空間の磁界分布  $\mathbf{H}$  が与えられたとき、磁界の測定される部分を除いて残りの空間すべてに電流密度  $\mathbf{J}$  が存在し得るとすれば、この既知磁界分布を満足する電流密度  $\mathbf{J}$  は無数に存在し一意的に求められないであろう。仮に、特定の空間に電流密度  $\mathbf{J}$  が存在すると仮定しても、電流密度  $\mathbf{J}$  が分布する空間内の磁界  $\mathbf{H}$  が測定できない限り、 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$  の関係から一意的に電流密度  $\mathbf{J}$  が決定できないことは明らかである。このため、IS 問題は 100 年以上の歴史を持つにも拘らず決定的な方法が確立されていない。しかし 現実は、磁界系の問題に限っても、人体胸部表面で測定される MCG（心磁図、Magnetocardiogram）や人体頭部表面で測定される MEG（脳磁図、Magnetoencephalogram）から人体内部の電流密度を推定し、完全な非侵襲的医学診断や脳機能の解明問題、空間に特定の磁界分布を必要とする MRI（Magnetic Resonance Imaging）の励磁コイル最適配置問題、各種磁気応用機器の最適励磁コイル設計問題さらにアクティブ磁気シールドの最適コイル配置問題等の多くの IS 問題が存在する。では現時点で、どのようにこれらの IS 問題是对応されているのか調べてみることは極めて興味深いことであろう。MCG や MEG 等の医学的 IS 問題では、電流とその経路を掛けた積を電流双極子（または電流素片）と呼び、どのような方法でも一意的に求められる最も支配的な電流双極子を 1 個求める方法や電流密度  $\mathbf{J}$  が平面上に分布し、且つその面から垂直方向の磁界  $\mathbf{H}$  の分布を、面上から離れた位置で測定されるにも拘らず、電流密度  $\mathbf{J}$  が分布する面で測定されたと仮定し、 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$  の演算で電流密度  $\mathbf{J}$  を推定するベクトル・アローマップ法等が提案されている。他の最適コイル配置に関する IS 問題の解決方法の多くは、コイル配置を仮定し順問題として解くことで磁界分布を求め、この磁界分布が目標とする磁界分布に一致するように順問題を反復して解く方法である[3]。

巨視的な観点で考えれば、逆問題は限られた情報から情報源、情報の伝わる規則性、そして情報が伝達されるメディアの性質を探索する問題と定義出来るであろう。例えば、生体の神経活動に伴う生体周辺で測定される電磁界が局所的情報であり、この局所的な電磁界分布情報から情報源である電磁界源を探索する問題は典型的な生体系逆問題である。また、原子力施設における放射線センサーから得られた放射線強度分布も局所的情報であり、この放射線強度分布から放射線源を探索する問題も代表的な逆問題である。このように逆問題は生体の活動メカニズム解明や人類が文明生活を維持するのに必要な原子力エネルギーの安全管理など、次世代技術の根幹となる問題である。

逆問題の多くは、局所的な情報に対応する式の数よりも多い情報源に対応する未知数の数を持つ線形システムを解くことに帰する。換言すれば、逆問題のシステム方程式は式の数よりも未知数の数が多い連立方程式である。このような線形システムは、システム行列が長方形であるため逆行列が計算できない。このため、逆問題のシステム方程式は不適切(ill posed)な線形システムと呼ばれ、従来の線形空間論では何らかの拘束条件を適用しな

い限り一意的な解が得られないことが知られている。

## 4.2 システム方程式

### 4.2.1 順問題

電磁界系だけでなく多くの工学・理学における解析問題は、微分または積分形の支配方程式を解くことに帰する。ディジタル計算機を前提とする数値解析では、有限要素法、有限差分法および積分方程式法等で代表される離散化法を用いて、支配方程式を連立方程式、すなわち、線形システム方程式の解に帰することができる[4]。いま、 $C$ 、 $X$ 、 $Y$  をそれぞれシステム方程式の係数行列、出力さらに入力ベクトルとすれば、システム方程式は、

$$CX=Y \quad (1)$$

の形に書くことができる。一般に適切に導かれた(1)式の係数行列  $C$  は正方行列であり逆行列を持つ非特異行列である。順問題は、(1)式の両辺に係数行列  $C$  の逆行列を乗算し、出力ベクトル  $X$  を求める問題である。このように逆行列が計算可能で、解ベクトル  $X$  が一意的に計算可能なシステムを適切な線形システム(well posed linear system)と呼ぶ。(1)式で出力ベクトル  $X$  が与えられ、入力ベクトル  $Y$  を求める問題を考える。この問題は、出力が与えられ入力を求める問題であるため逆問題と解釈されがちであるが、単に出力ベクトル  $X$  を(1)式に代入して入力ベクトル  $Y$  を求める問題であり解は一意的に求められる。このため、直接問題(direct problem)と呼ばれる。

### 4.2.2 逆問題

**<a>IS 問題** 図 1 に示すようにフィルム幅  $fl$  に電流が流れていて、フィルム上方に位置するフィルムに平行な磁界の測定区間  $ol$  を考え、磁界が  $n$  点等間隔で測定される。フィルムは等間隔に  $m$  個に分割され、この各点に集中された  $m$  点の電流を求める問題を考える。



図 1.磁界測定から電流分布を探索するモデル

図 1 で、磁界  $H_i (i=1,2,..,n)$  と電流  $i_j (j=1,2,..,m)$  の関係は Ampere の法則

$$H_i = \frac{i_j}{2\pi r_{ij}} \quad (2)$$

で与えられる。 $r_{ij}$ は磁界 $H_i (i=1,2,..,n)$ と電流 $i_j (j=1,2,..,m)$ 間の距離である。

(2)式から、次式のシステム方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{1}{r_{12}} & \cdots & \frac{1}{r_{1m}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{22}} & \cdots & \frac{1}{r_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n1}} & \frac{1}{r_{n2}} & \cdots & \frac{1}{r_{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix},$$

or

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{D}\mathbf{Y},$$

$$m > n$$

(3)式はアンペアの法則から得られる IS 問題のシステム方程式である。一般に式の数  $n$  よりも未知数の数  $m$  が多く、(3)式の係数行列  $\mathbf{D}$  は長方形列となり、 $\mathbf{D}$  の逆行列が求められない。このような線形システムを不適切な線形システム(ill posed linear system)と呼ぶ。

IR 問題 (3)式はアンペアの法則から得られた。しかし、アンペアの法則が既知でなく、 $H_1, H_2$  が既知であるとき電流と磁界間の関係を表すパラメータ  $a, b, c, d$  を求めたい。 $a, b, c, d$  は電流と磁界間のパラメータであるから、次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_1 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

or

(4)

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{D}\mathbf{Y}$$

(4)式は電流 $i_1, i_2$ と磁界 $H_1, H_2$ 間の関係を司るパラメータ  $a, b, c, d$ を求める IR 問題のシステム方程式である。IR 問題も不適切な線形システムを解くことに帰する。

**<b>IP 問題** 具体的な例として図 2 に示す IP 問題を考える。図 2 で、磁界と電流の関係は

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{1}{r_{12}} & \cdots & \frac{1}{r_{1m}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{22}} & \cdots & \frac{1}{r_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n1}} & \frac{1}{r_{n2}} & \cdots & \frac{1}{r_{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{e11}} & \frac{1}{r_{e12}} & \cdots & \frac{1}{r_{e1m}} \\ \frac{1}{r_{e21}} & \frac{1}{r_{e22}} & \cdots & \frac{1}{r_{e2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{en1}} & \frac{1}{r_{en2}} & \cdots & \frac{1}{r_{enm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \\ \vdots \\ i_{em} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

or

$$\mathbf{X}_p = D\mathbf{Y}_s + D_e \mathbf{Y}$$

となる。 $r_{ij}$  は  $H_i (i=1,2,\dots,n)$  と等価電流  $i_j (j=1,2,\dots,m)$  間の離である。

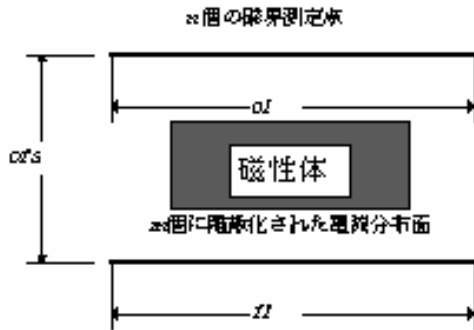


図 2. 既知電流分布面と磁界測定点間に未知磁性体が挿入された場合の IP 問題  
flm 個に等分割され、磁性体は k 個に等分割される

(5)式から磁性体の等価電流ベクトル  $\mathbf{X}_{om}$  は、

$$\begin{pmatrix} H_{1e} \\ H_{2e} \\ \vdots \\ H_{ne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{1}{r_{12}} & \cdots & \frac{1}{r_{1m}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{22}} & \cdots & \frac{1}{r_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n1}} & \frac{1}{r_{n2}} & \cdots & \frac{1}{r_{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{e11}} & \frac{1}{r_{e12}} & \cdots & \frac{1}{r_{e1k}} \\ \frac{1}{r_{e21}} & \frac{1}{r_{e22}} & \cdots & \frac{1}{r_{e2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{en1}} & \frac{1}{r_{en2}} & \cdots & \frac{1}{r_{enk}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \\ \vdots \\ i_{ek} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

or

$$\mathbf{X}_{pm} = \mathbf{X}_p - D\mathbf{Y}_s = D_e \mathbf{Y}_k$$

を解くことによって得られることとなる。さらに、磁性体自身は電流を発生するエネルギー源を持たないため、解に対する拘束条件

$$\sum_{i=1}^k i_{ei} = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。

(7)式は

$$\begin{pmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \\ \vdots \\ i_{ek} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{e1'} \\ i_{e2'} \\ \vdots \\ i_{ek-1'} \end{pmatrix}$$

or

$$\mathbf{Y} = F\mathbf{Y}_{\text{New}} \quad (8)$$

であるから、(6)式は

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{pm}} &= D_e \mathbf{Y} \\ &= D_e F \mathbf{Y}_{\text{New}} \\ &= D_M \mathbf{Y}_{\text{New}} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。(9)式が IM 問題のシステム方程式である。(9)式から、IM 問題もまた不適切な線形システムを解くことに帰することがわかる。

### 4.3 不適切な線形システムの解

#### 4.2.1 解の自由度

一般に逆問題は、式の数より未知数の多い不適切なシステム方程式を解くことに帰する。ここでは、最も簡単な例として次式を考える。

$$ax + by = c$$

$$\text{or} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c), \quad \mathbf{AX} = \mathbf{Y}$$

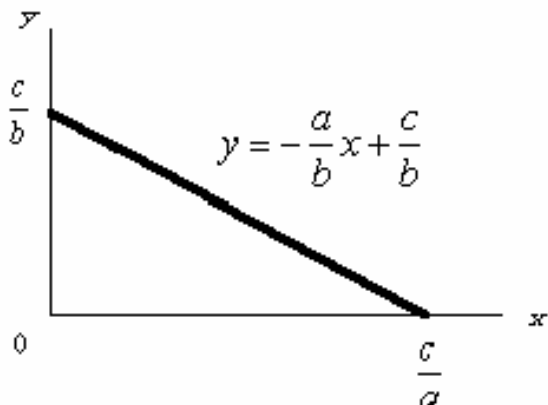


図 3.(10)式の解直線

(10)式で、 $x=0$  のとき  $y=c/b$ ,  $y=0$  のとき  $x=c/a$  であるから、図 3 に示す解直線上の点はすべて(10)式の解である。

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad (11)$$

(11)式は解直線を表し、解は  $x$  が決まれば  $y$  が決まることを意味する。換言すれば、 $x, y$  の何れか一方が決まれば他は従属して決まる。これは重要な関係であり、逆問題では、式の数に等しい数の解が一意的に決まれば残りの解は従属して決まることを意味する。

同様にして、(12)式の線形システムを考える。

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= g \\ dx + ey + fz &= h \end{aligned}$$

or

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \quad C\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (12)$$

(12)式で、 $a, b, c, d, e, f$  は定数、 $x, y, z$  は未知数、さらに  $g, h$  は入力であるから、式の個数が 2 個で未知数が 3 個の不適切な線形システムである。

まず、 $ax+by+cz=g$  で、 $y=z=0$  として  $x=g/a$ 、 $x=z=0$  として  $y=g/b$ 、 $x=y=0$  として  $z=g/c$  が得られる。次に、 $dx+ey+fz=h$  から、 $x=h/d$ 、 $y=h/e$ 、 $z=h/f$  が得られる。(12)式の解は、図 4 に示すように、 $ax+by+cz=g$  が形成する平面と  $dx+ey+fz=h$  が形成する平面の交差する太線上に存在する。この太線上の座標で  $x, y, z$  の何れか 2 個の座標が決まれば残り 1 個は従属して決まる。

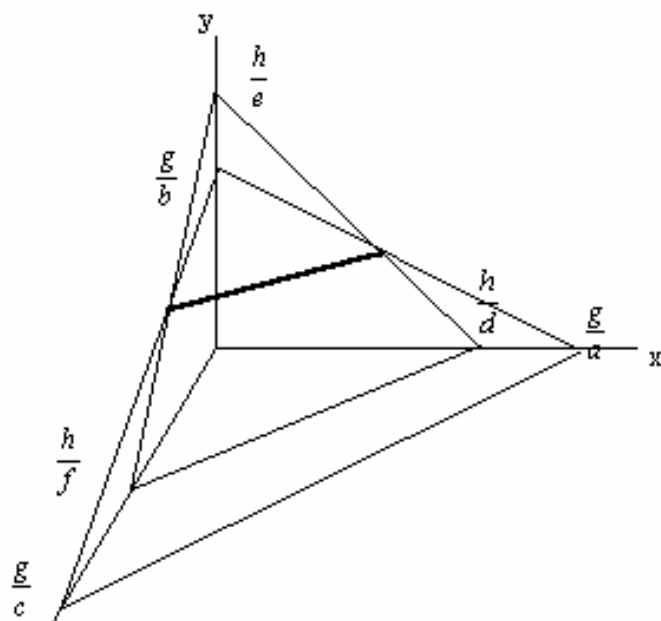


図 4.(12)式の解直線（太線上）

以上の例から、不適切問題は式の数  $n$  に等しい個数の解が一意的に決まり、残りの  $m-n$  個の解は一意的に決まった  $n$  個の解に従属することがわかる。

#### 4.1.4 まとめ

本章では、磁界系の逆問題を例として取り上げ、逆問題は不適切な線形システムを解くことに帰することを述べた。不適切な線形システムの解の自由度は独立な式の個数に等しいことを簡単な例題を用いて示した。

#### 参考文献

- [1]G.Anger,"Inverse Problems in Differential Equations," (Plenum Press, New York and London, 1990)
- [2]岩井喜典、他 編著、"医用画像診断装置 -CT,MRI を中心として-," (コロナ社、1988 年 12 月 20 日)
- [3]斎藤兆古、"電磁界系逆問題解析技術の進歩"、電気学会論文誌 A、第 114 巻 6 号、平成 6 年
- [4]依田潔、"Mathematica による電磁界シミュレーション、" (森北出版、1997 年)



## 4.2 重み付き逆行列法の基礎

### 4.2.1 概要

本章では、未知数の数が式の数よりも圧倒的に多い不適切な線形システムの解析法として重み付き逆行列法の基礎的な考え方について述べる。

重み付き逆行列法は一般化逆行列法を拡張した方法であり、実際の物理系で遭遇する実用的な逆問題解析に有効な方法である。一般化逆行列法は解の形を仮定しない汎用的な解法であるが、重み付き逆行列法は解の形を仮定することで重み行列を決定する。多くの物理系における解の形は解の存在する空間座標の連続関数として表される。重み付き逆行列法は解が空間座標の関数として級数展開可能であることを仮定し、展開された級数の係数を決定することで逆問題の解を得る方法である。

最初に、最も簡単な不適切な線形システムの例題を取り上げ解の自由度を吟味する。次に、解の自由度から解の形を仮定する重み付き逆行列 (Weighted Inverse Matrix, 以下 WIM と略記) 法を述べ、従来の最小ノルム法が WIM 法から導けることを示す。さらに、実際の物理系で遭遇する不適切問題を取り上げ本章で提案する WIM 法による解の性質を吟味する。

### 4.2.2 一般化逆行列法

逆問題の多くは、局所的な情報に対応する式の数よりも多い情報源に対応する未知数の数を持つ線形システムを解くことに帰する。換言すれば、逆問題のシステム方程式は式の数よりも未知数の数が多い連立方程式である。このような線形システムは、システム行列が長方形であるため逆行列が計算できない。このため、逆問題のシステム方程式は不適切な線形システムと呼ばれ、従来の線形空間論では何らかの拘束条件を適用しない限り一意的な解が得られないことが知られている。

数学的には不適切な線形システムを解く方法として一般化逆行列が知られている。一般化逆行列法の一つである最小ノルム法は逆問題型の不適切な線形システムの解を与える一方法である。最小ノルム法の最大の長所は必ず解が得られる点にある。しかしながら、得られた解が物理的に存在する解とは限らず何らかの拘束条件を付加しない限り実用的結果は期待できない。

本稿では、

- 1) 逆問題における解の自由度、
  - 2) 新しい逆問題解析法として WIM 法の提案、
  - 3) WIM 法による解の性質、
- について検討する。

### 4.2.3 重み付き逆行列法

**<a>解の自由度** 一般に逆問題は、式の数より未知数の多い不適切なシステム方程式を解くことに帰する。ここでは、具体的な例として次式を考える。

$$ax + by = c$$

$$\text{or} \quad (1)$$

$$(a \ b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c), \quad \mathbf{A} = \mathbf{Y}$$

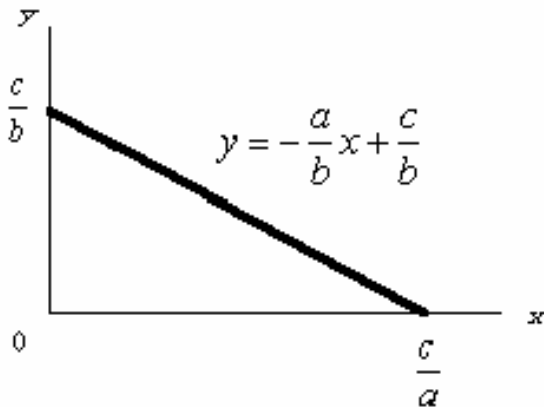


図 1.(1)式の解直線

(1)式で、 $x=0$  のとき  $y=c/b$ ,  $y=0$  のとき  $x=c/a$  であるから、図 1 に示す解直線上の点はすべて(1)式の解である。

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad (2)$$

(2)式は解直線を表し、解は  $x$  が決まれば  $y$  が決まることを意味する。換言すれば、 $x, y$  の何れか一方が決まれば他は従属して決まる。これは重要な関係であり、逆問題では、式の数に等しい数の解が一意的に決まれば残りの解は従属して決まることを意味する。

**<b>WIM 法** (1)式は、式の個数が 1、未知数の個数が 2 であるから、解ベクトルを以下のように仮定する。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} s_0 \quad (3)$$

ここで、 $w_1, w_2$  は重み係数であり、 $s_0$  は定数である。(3)式を(1)式へ代入すれば、

$$(ab) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} s_0 = (c) \quad (4)$$

であるから、

$$s_0 = [w_1 \ a + w_2 \ b]^{-1} [c]$$

or

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} s_0 \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} [w_1 \ a + w_2 \ b]^{-1} [c]$$

として解ベクトルが得られる。

(5)式を一般的に書けば、

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}[\mathbf{C}\mathbf{W}]^{-1} \mathbf{Y} \quad (6)$$

(6)式で、 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Y}$ 、 $\mathbf{C}$  は、それぞれ  $m$  次の解ベクトル、 $n$  次の既知ベクトル、さらに  $n$  行  $m$  列のシステム行列である。 $\mathbf{W}$  は  $m$  行  $n$  列の重み行列である。 $m \geq n$  を前提条件としている。

(6)式で最大の問題点は重み行列  $\mathbf{W}$  の決め方である。ここでは解  $s$  が解空間  $\alpha$  の関数  $s(\alpha)$  であり、

$$s(\alpha) = s_0 + \alpha s_1 + \alpha^2 s_2 + \dots + \alpha^{n-1} s_{n-1} \quad (7)$$

とした一例を示す。

(7)式から解ベクトル  $\mathbf{X}$  の要素が  $\Delta\alpha$  毎に離散化された値とすれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \Delta\alpha & \Delta\alpha^2 & \dots & \Delta\alpha^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (n-1)\Delta\alpha & [(n-1)\Delta\alpha]^2 & \dots & [(n-1)\Delta\alpha]^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{W} \mathbf{S} \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる。

(8)式は解がテイラー級数展開可能として仮定した重み行列  $\mathbf{W}$  を決定する方法である。すなわち、WIM 法は解が滑らかでテイラー展開可能であり、且つ最初の第  $n$  項までの和で解が表されると仮定することが骨子である。

#### <c>最小ノルム解

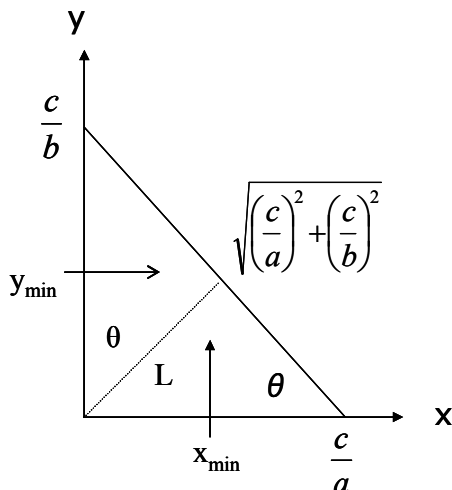


図 2.最小ノルム法

最小ノルム法は図 2 に示す解直線上で最も原点から距離  $L$  が短い解  $x_{\min}, y_{\min}$  を(1)式の解とする。明らかに距離  $L$  は

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{x_{\min}^2 + y_{\min}^2} \\
 &= \frac{c}{b} \cos\theta = \frac{c}{b} \left( \frac{\frac{c}{a}}{\sqrt{(\frac{c}{a})^2 + (\frac{c}{b})^2}} \right) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

であるから、解ノルムは最小となる。

従って、最小ノルム解は(10)式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 x_{\min} &= L \sin\theta \\
 &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\frac{c}{b}}{\sqrt{(\frac{c}{a})^2 + (\frac{c}{b})^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2} c \\
 y_{\min} &= L \cos\theta \\
 &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\frac{c}{a}}{\sqrt{(\frac{c}{a})^2 + (\frac{c}{b})^2}} = \frac{b}{a^2 + b^2} c
 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_{\min} \\ y_{\min} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]^{-1} c \\
 \mathbf{X} &= \mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{C}^T]^{-1} \mathbf{Y}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

(10)式から、最小ノルム解は(1)式の係数  $a, b$  に依存し、 $x$  の係数  $a$  が  $y$  の係数  $b$  に対応し、 $w_1=a$ 、 $w_2=b$  とした場合である。換言すれば、(10)式は WIM 法における(3)–(5)式の重み係数を

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
 \tag{11}$$

とした解である。従って、一般化逆行列法の一つである最小ノルム法は重み付き逆行列法の一つである。

解が解空間で(8)式のようにテイラー級数展開可能とすれば、WIM 法による重み係数は

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \tag{12}$$

となり、解ベクトル  $\mathbf{X}$  は

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} c \\
 &= \frac{c}{a+b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

となる。

(13)式の解を(1)式に代入すれば、

$$ax + by = a \left[ \frac{c}{a+b} \right] + b \left[ \frac{c}{a+b} \right] = c
 \tag{14}$$

となり、厳密に式を満足することがわかる。

#### 4.2.4 1次元電流探索問題

<a>計算の準備 メモリーの少ない機械を使う場合は下記のメモリの節約コマンドを入れる。続いて、線形代数さらにグラフィックスのパッケージを入れる。尚、これらの命令は

複数回入れるとエラーになるから注意すべきこと。

```
<<Utilities`MemoryConserve`
$MemoryIncrement=100000;
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
Off[General::spell1,MemoryConserve::start,MemoryConserve::end];
```

重み付き行列法の係数ベクトルを計算する関数を定義しておく。

```
coefficientVector=
  Compile[{{systemMatrix,_Real,2},{inPut,_Real,1},
           {weightMatrix,_Real,2}},
    Inverse[systemMatrix.weightMatrix].inPut];
```

<b>モデルの設定</b> ここでは、図3に示すように接線方向磁界の測定から電流を探索するサンプル例題を考えよう。

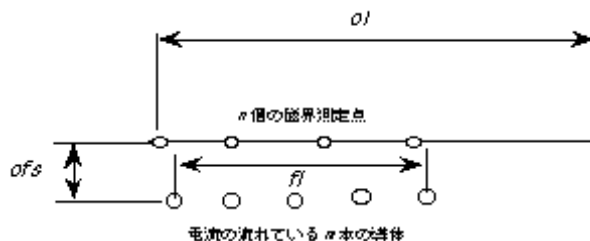


図3.磁界測定から電流を探索するモデル

アンペアの法則  $H=i/(2\pi r)$  を用いて、距離に関する関数を定義する。i と j はそれぞれ、フィルムと測定点の位置を示す。hiGht はセンシング部分の高さである。

```
greenFuncComp=
  Compile[{i, j, filmSubDiv, measureSubDiv, hiGht},
    coefficient=hiGht/(2*Pi);
    distanceSquared=(j*measureSubDiv-0.5*measureSubDiv -
                     i*filmSubDiv+0.5*filmSubDiv)^2 + hiGht^2;
    coefficient/distanceSquared];
```

<c>解が滑らかな関数の場合</c> まず最初に、計算に使用する諸定数を与えておく。ターゲットと測定面の長さをそれぞれ 1.0m とする。さらに、測定点数は n=5、ターゲットの分割個数は m=20 であり、測定面と対象面間の距離を ofs=1mm とする。

この問題では、式の数に等しい測定点数 n=5 個の解が一意的に決まり、残りの 15 個の解は従属して決まる。

```
fl=1.0; ol=1.0; ofs=0.001;
n=5;          djMeasure=ol/n;
```

```
m=20; diTarget=fl/m;
```

モデルのシステム行列を作成する。

```
systemMatrix=
```

```
Table[greenFuncComp[i,j,diTarget,djMeasure,ofs],{j,n},{i,m}];
```

モデルの電流分布の関数を定義する。

$$\text{sourceFunc}[\mathbf{x}_-, n_-] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2 * (i - 1) + 1} \right) * (-\mathbf{x})^{i-1};$$

図 4 にモデルソース分布を示す。

```
modelFieldSourceOriginal=
```

```
Table[sourceFunc[i*diTarget,n],{i,m}];
```

```
modelSourceG=
```

```
ListPlot[modelFieldSourceOriginal, PlotRange -> All,
```

```
Prolog -> AbsolutePointSize[4],
```

```
AxesLabel -> {"Pos.", "Ampere"},
```

```
PlotLabel -> "Model source"];
```

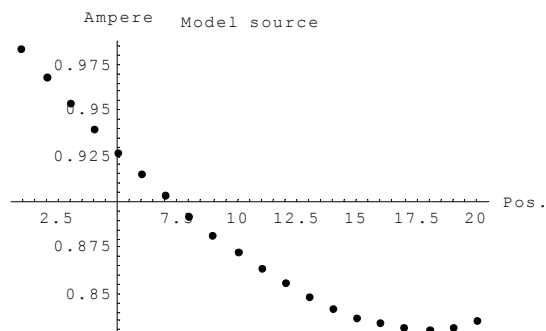


図 4.モデル電流分布

測定される磁界ベクトルを計算し、図 5 に示す。

```
fieldH=systemMatrix.modelFieldSourceOriginal;
```

```
measuredFieldG=ListPlot[fieldH,
```

```
PlotJoined -> True,PlotRange->All,
```

```
PlotLabel->"Measured field",AxesLabel->{"Pos.", "Field H[A/m]"}];
```

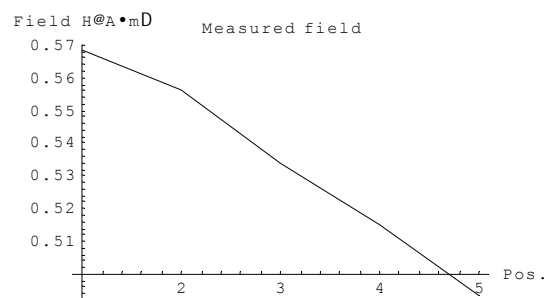


図 5.測定される磁界分布

最小ノルム解 最小ノルム法で解を求めてみよう。

```
weightMatrixMN=Transpose[systemMatrix];
Timing[minimumNormSolution=weightMatrixMN.coefficientVector[
    systemMatrix,fieldH,weightMatrixMN];]
{0. Second,Null}
```

方程式を満足する解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Abs[Chop[fieldH-systemMatrix.minimumNormSolution]]]
0
```

完全にシステム方程式を満足する解が得られている。最小ノルム解を図 6 に示す。

```
solutionMNG=
    ListPlot[minimumNormSolution,
        PlotRange->All,PlotJoined->True,
        AxesLabel->{"Pos. ","Ampere"},
        PlotLabel->"Minimum norm solution"];
```

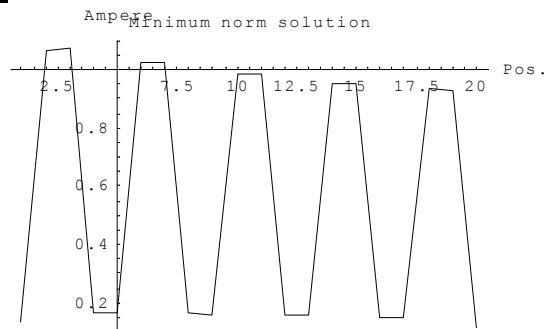


図 6.最小ノルム解

図 7 に正解と最小ノルム解の比較を示す。最小ノルム解は振動的である。

```
Show[modelSourceG,solutionMNG,
    PlotLabel->"Thin:MN, Bold:Exact"];
```

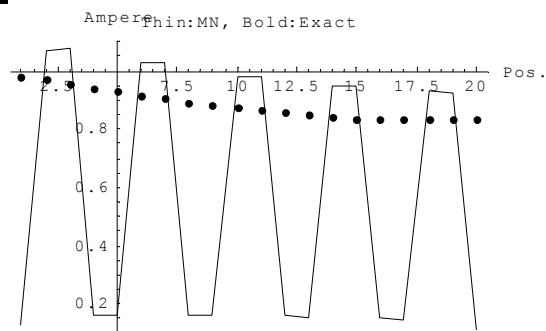


図 7.正解（ドット）と最小ノルム解（細線）の比較

WIM 解 まず、(8)式に従って重み行列を作る。

```
weightMatrixWIM=Table[0.,{j,m},{i,n}];weightMatrixWIM[[1,1]]=1.;
```

```
Do[weightMatrixWIM[[j,i]]=((j-1) diTarget)^(i-1),{j,2,m},{i,n}];
```

```
weightMatrixWIM//MatrixForm
```

1.	0.	0.	0.	0.
1	0.05	0.0025	0.000125	$6.25 \times 10^{-6}$
1	0.1	0.01	0.001	0.0001
1	0.15	0.0225	0.003375	0.00050625
1	0.2	0.04	0.008	0.0016
1	0.25	0.0625	0.015625	0.00390625
1	0.3	0.09	0.027	0.0081
1	0.35	0.1225	0.042875	0.0150063
1	0.4	0.16	0.064	0.0256
1	0.45	0.2025	0.091125	0.0410063
1	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	0.55	0.3025	0.166375	0.0915063
1	0.6	0.36	0.216	0.1296
1	0.65	0.4225	0.274625	0.178506
1	0.7	0.49	0.343	0.2401
1	0.75	0.5625	0.421875	0.316406
1	0.8	0.64	0.512	0.4096
1	0.85	0.7225	0.614125	0.522006
1	0.9	0.81	0.729	0.6561
1	0.95	0.9025	0.857375	0.814506

WIM 解を計算する。

```
Timing[weightenSolution=
```

```
weightMatrixWIM.(orderVector=
```

```
coefficientVector[systemMatrix,fieldH,weightMatrixWIM]);]
```

```
{0. Second,Null}
```

図 8 に WIM 解を示す。

```
solutionWIMG=
```

```
ListPlot[weightenSolution,PlotRange->All,
```

```
PlotJoined->True,
```

```
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
```

```
PlotLabel->"WIM solution"];
```

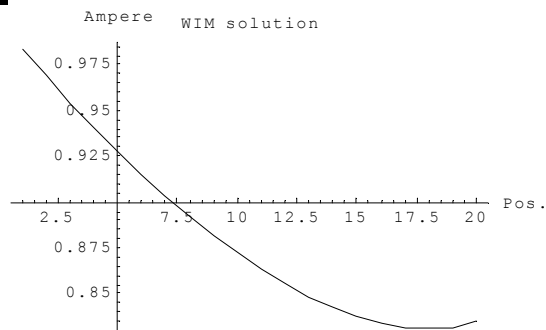


図 8.WIM 解

図 9 に正解と WIM 解の比較を示す。図 6 の最小ノルム解、図 8 の WIM 解、何れも方程式を満足する解であるが、モデルソースをソースが存在する空間の関数であるとしたため、



解をソース空間の関数で表現可能と仮定した WIM 法は正しい結果を与えている。

```
Show[modelSourceG,solutionWIMG,
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

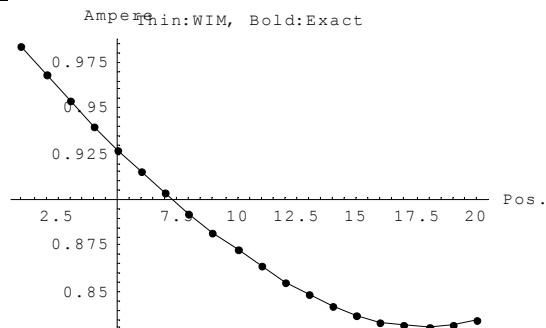


図 9.正解と WIM 解の比較

WIM 法は解をテイラー展開の第 5 項までで表現可能な関数と仮定している。第 5 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
{0.983816,-0.314349,0.180238,-0.120635,0.111111}
```

正解は $\{1, -1/3, 1/5, -1/7, 1/9\}$ であるから、ほぼモデルソースの係数が得られている。

<d>解が不連続関数の場合 図 10 のような不連続なモデルソース分布を考える。

```
modelDiscontinuousFieldSourceOriginal=
Join[Table[0,{i,5}],Table[1,{i,m-10}],Table[0,{i,5}]];
modelSourceG=
ListPlot[modelDiscontinuousFieldSourceOriginal,
PlotRange -> All, Prolog -> AbsolutePointSize[4],
AxesLabel -> {"Pos.", "Ampere"},
PlotLabel -> "Model source"];
```

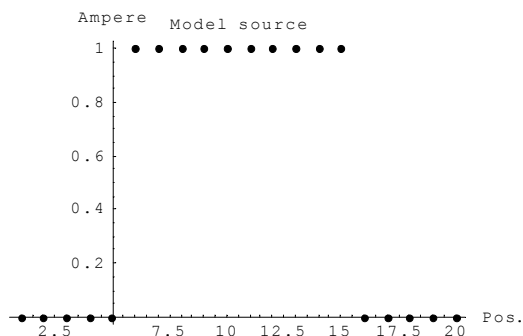


図 10.不連続点を含むモデル電流分布

測定される磁界ベクトルを計算し、図 11 に示す。

```
fieldH=systemMatrix.modelDiscontinuousFieldSourceOriginal;
```

```

measuredFieldG=ListPlot[fieldH,
PlotRange->All,PlotJoined->True,
PlotLabel->"Measured field",AxesLabel->{"Pos. ","Int."}];

```

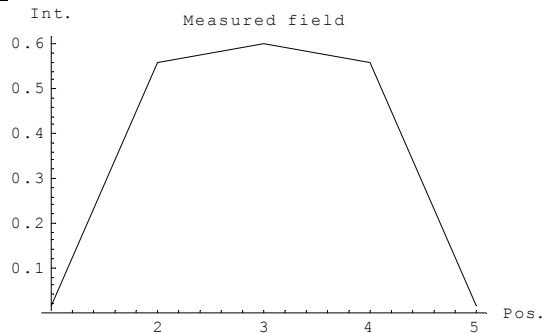


図 11.測定される磁界分布

最小ノルム解 最小ノルム法で解を求めてみよう。

```

weightMatrixMN=Transpose[systemMatrix];
Timing[minimumNormSolution=weightMatrixMN.coefficientVector[
systemMatrix,fieldH,weightMatrixMN];]
{0. Second,Null}

```

方程式を満足する解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```

Max[Abs[Chop[fieldH-systemMatrix.minimumNormSolution]]]
0

```

正確にシステム方程式を満足する解が得られている。最小ノルム解を図 12 に示す。

```

solutionMNG=
ListPlot[minimumNormSolution,
PlotRange->All,PlotJoined->True,
AxesLabel->{"Pos. ","Ampere"},
PlotLabel->"Minimum norm solution"];

```

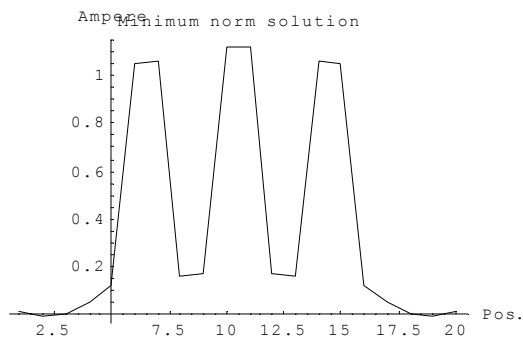


図 12.最小ノルム解

図 13 に正解と最小ノルム解の比較を示す。最小ノルム解は振動的である。

```

Show[modelSourceG,solutionMNG,

```

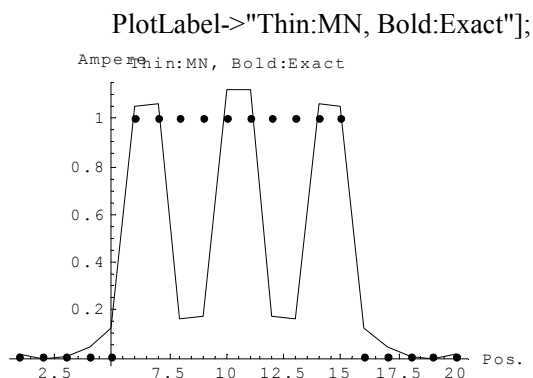


図 13.正解（細線）と最小ノルム解（ドット）の比較

WIM 解 WIM 解を計算する。

```
Timing[weightenSolution=
  weightMatrixWIM.(orderVector=
    coefficientVector[systemMatrix,fieldH,weightMatrixWIM]);]
{0. Second,Null}
```

方程式を満足する解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[fieldH-systemMatrix.weightenSolution]]
0
```

方程式を満足している。最小ノルム解を図 14 に示す。

```
solutionWIMG=
  ListPlot[weightenSolution,PlotRange->All,
    PlotJoined->True,
    AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
    PlotLabel->"WIM solution"];
```

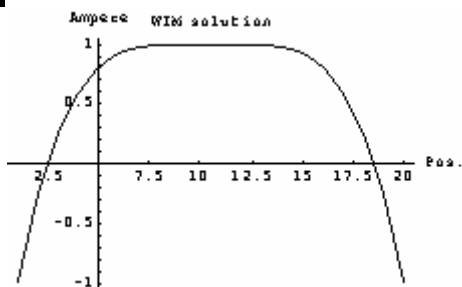


図 14.WIM 解

図 15 に正解と WIM 解の比較を示す。最小ノルム解、WIM 解、何れも方程式を満足する解であるが、モデルソースをソースが存在する空間の連続関数と仮定した WIM 法は滑らかな解を与えている。明らかに、WIM 法は不連続点を含むソース場合、正しい結果を与えることができない。

```
Show[modelSourceG,solutionWIMG,
```

**PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact";**

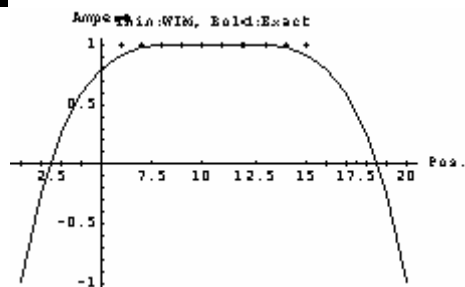


図 15.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

WIM 法は解をテイラー展開の第 5 項までで表現可能な関数と仮定している。第 5 項までの係数を調べてみよう。

**Chop[orderVector]/N**

**{-0.977751,17.1726,-55.4234,78.6253,-41.3817}**

となり、解が収束しているとは言えない。

#### 4.2.5 まとめ

本章では重み付き逆行列法の提案と原理を述べた。また、簡単な例題を用いて従来の最小ノルム法が物理的に存在しない解を与える問題であっても重み付き逆行列法は正しい解を与えることを示した。

本章では重み行列を、解が解空間座標のべき級数で表現可能であるとして導いた。この方法は一般的である反面収束が悪く、解が表現できない場合がある。不適当な解であるかどうかの評価はべき級数の係数の収束性から判定できる。従来の一般化逆行列では解の評価が不可能であるから、重み付き逆行列法は逆問題解析の新しい可能性を持つ。

重み付き逆行列法の可解性は、重み行列の導き方、すなわち、解がどのような関数系で展開出来るかに依存する。解が不連続点を含む場合、テイラー展開が不可能であるため、WIM 法は無力である。このような WIM 法の問題を解決するには解が三角関数等で展開されると仮定する方法が考えられる。さらにノイズの影響等について明らかにしなければならない。

本章の目的は新しい逆問題解析法である重み付き逆行列法 (weighted inverse matrix method) の提案と原理検証である。これらの目的は本章でほぼ達成されたと考える。

### 4.3 関数型重みつき逆行列法

#### 4.3.1 概要

逆問題解析は未知数の数が式の数よりも多い不適切な線形システム方程式を解くことに帰する。一般に未知数の数が式の数よりも多い線形システムの解は無数に存在する。無数に存在する解から一意的な解を求めるためには何らかの拘束条件が必要である。最も多く使われる拘束条件は解のノルムが最小になる最小ノルム条件である。このように解のノルムを最小とする解法を最小ノルム法という。最小ノルム法は物理的にはシステムに蓄えられるエネルギーを最小にする解を求めることに対応するが、現実の解はエネルギーを最小にする解でない。また、最小ノルム法はシステム方程式の係数行列に解が大きく依存する。このような問題点を克服する方法として、4.1 では、一般化逆行列法を拡張した重み付き逆行列法を提案した。最小ノルム法が解のノルムを最小とする拘束条件を採用したのに対し、重み付き逆行列法は解が級数展開可能な解析的で滑らかな関数であるとする拘束条件を採用した。第 2 章では、解が解空間でテイラー級数展開可能であるとして重み関数を決定する方法を具体例として述べた。解が解空間でテイラー級数展開可能と仮定した重み付き逆行列法は、解が滑らかで解析的に級数展開可能な解に対して正しい結果を与えた。しかし、解が不連続点を含む関数に対しては正しい解を与えない。

ここでは、重み行列を関数から決定する関数型重み付き逆行列法について述べる。関数型重み付き逆行列法は、例えば解が解空間においてフーリエ級数で表現可能とした場合、重み関数が三角関数で決定される。また、重み関数は必ずしも三角関数のような連続関数である必要がなく、矩形波のような不連続関数から計算することも可能である。

関数型重み付き逆行列法は、解が連続関数で表現される場合だけでなく解が不連続関数であっても良好な結果を与えることを示す。

#### 4.3.2 関数型重み付き逆行列法の原理

**<a>考え方** 逆問題の多くは、局所的な情報に対応する式の数  $n$  よりも多い情報源に対応する未知数の数  $m$  を持つ線形システムを解くことに帰する。これは、一意的に決まる解ベクトルの要素数は式の数  $n$  に等しく、未知数の数から式の数を引き算した数( $m-n$ )の解要素は式の数  $n$  に等しい数の解要素に従属して決まる。関数型重み付き逆行列法は、未知数の数から式の数を引き算した数( $m-n$ )の解要素を単純に式の数  $n$  に等しい解要素に従属して決めるのではなく、何らかの関数で補間して与えようとする考え方に基づいている。例えば、式の数が  $n=1$  個、未知数の数が  $m=2$  個の場合、一意的に決まる解は  $n=1$  個であり、残りの解は従属して決まる。このとき、単純な従属でなく、一意的に決まる 1 個の解と従属して決まる残りの 1 個の解の間を何らかの関数で補間して与えようとする考え方が関数型重み付き逆行列法の骨子である。

ここでは、

- 1) 関数型重み付き逆行列法の理論的基礎、

2) 重み関数として連続関数を採用した場合の解、  
 3) 不連続な重み関数として Walsh (ワルシュ)関数を採用した場合の解、  
 について述べる。

**<b>三角関数を使った重み付き逆行列法** 式の数が  $n$ 、式の数より多い未知数  $m$  を持つ不適切な線形システムは、 $C$  を  $n$  行  $m$  列の係数行列として、(1)式で与えられる。

$$Y=CX \quad (1)$$

(1)式の解は  $W$  を  $m$  行  $n$  列の重み行列として、解ベクトル  $X$  が次式で与えられると仮定する。

$$X=WS \quad (2)$$

$S$  は  $n$  次の列ベクトルである。

解ベクトル  $X$  が(2)式で与えられ、行列  $CW$  が非特異行列である場合、重み付き逆行列法は次式の解を与える。

$$X= W[CW]^{-1} Y \quad (3)$$

(3)式で最大の問題点は重み行列  $W$  の決め方である。第2章では解  $s$  が解空間  $\alpha$  の関数  $s(\alpha)$  であり、

$$s(\alpha) = s_0 + \alpha s_1 + \alpha^2 s_2 + \dots + \alpha^{n-1} s_{n-1} \quad (4)$$

とした。

ここでは、解  $s$  が解空間  $\alpha$  の関数であり、以下の形で与えられるとする。

$$s(\alpha) = s_0 + s_1 \cos[\alpha] + s_2 \sin[\alpha] + s_3 \cos[2\alpha] + s_4 \sin[2\alpha] + \dots \quad (5)$$

(5)式は解が三角関数の和で与えられると仮定することを意味し、複素数を使っても書ける。すなわち、

$$s(\alpha) = s_0 \operatorname{Re}[e^{i0\alpha}] + s_1 \operatorname{Re}[e^{i\alpha}] + s_2 \operatorname{Im}[e^{i\alpha}] + s_3 \operatorname{Re}[e^{i2\alpha}] + s_4 \operatorname{Im}[e^{i2\alpha}] + \dots \quad (6)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

(5)式で、解の存在する空間が  $\Delta\alpha$  毎に離散化されたとすれば、解ベクトル  $X$  は、

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \cos[\Delta\alpha] & \sin[\Delta\alpha] & \cos[2\Delta\alpha] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos[(n-1)\Delta\alpha] & \sin[(n-1)\Delta\alpha] & \cos[2(n-1)\Delta\alpha] & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= WS \end{aligned} \quad (8)$$

となり、(8)式から重み関数  $W$  が決定される。

#### 4.3.3 1次元電流探索問題

<a>計算の準備 メモリーの少ない機械を使う場合は下記のメモリの節約コマンドを入れる。続いて、線形代数さらにグラフィックスのパッケージを入れる。尚、これらの命令は複数回入れるとエラーになるから注意すべきこと。

```
<<Utilities`MemoryConserve`
```

```
$MemoryIncrement=100000;
```

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
```

```
Off[General::spell1,MemoryConserve::start,MemoryConserve::end];
```

重み付き逆行列法の係数ベクトルを計算する関数を定義しておく。

```
coefficientVector=
```

```
Compile[{{systemMatrix,_Real,2},{inPut,_Real,1}},
```

```
{weightMatrix,_Real,2}},
```

```
Inverse[systemMatrix.weightMatrix].inPut];
```

<b>モデルの設定 ここでは、図 1 に示すように接線方向磁界の測定から電流を探索する例題を考える。

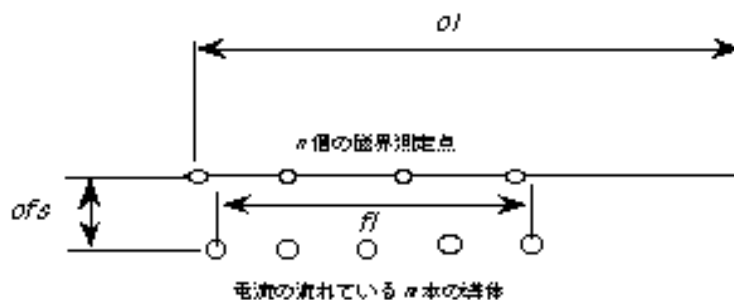


図 1.磁界測定から電流を探索するモデル

アンペアの法則  $H=i/(2\pi r)$  を用いて、距離に関する関数を定義する。 $i$  と  $j$  はそれぞれ、フィルムと測定点の位置を示す。 $hiGht$  はセンシング部分の高さである。

```
greenFuncComp=
```

```
Compile[{i, j, filmSubDiv, measureSubDiv, hiGht},
```

```
coeffiCient=hiGht/(2*Pi);
```

```
distanceSquared=(j*measureSubDiv-0.5*measureSubDiv -
```

```
i*filmSubDiv+0.5*filmSubDiv)^2 + hiGht^2;
```

```
coeffiCient/distanceSquared];
```

計算に使用する諸定数を与えておく。ターゲットと測定面の長さをそれぞれ 1.0m とする。

さらに、測定点数は  $n=5$ 、ターゲットの分割個数は  $m=30$  であり、測定面と対象面間の距離を  $ofs=1\text{mm}$  とする。

測定点数  $n$  は、偶(even)関数と奇(odd)関数が同一次数をとるために、定数項+偶関数+奇関数の和が奇数あるから、常に奇数でなければならないことに注意を要する。

この問題では、式の数に等しい測定点数  $n=5$  個の解が一意的に決まり、残りの 25 個の解は従属して決まる。

```
fl=1.0;  ol=1.0;  ofs=0.001;
n=5;          djMeasure=ol/n;
m=30;  diTarget=fl/m;
```

モデルのシステム行列を作成する。

```
systemMatrix1=
    Table[greenFuncComp[i,j,diTarget,djMeasure,ofs],{j,n},{i,m}];
<c>重み関数が連続関数(三角関数)の場合 (8)式に従って重み行列を作る。
weightMatrixWIM1=Table[0.,{j,m},{i,n}];
    Do[weightMatrixWIM1[[j,1]]=1,{j,m}];
    Do[
        weightMatrixWIM1[[j,i]]=Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl];
        weightMatrixWIM1[[j,i+1]]=Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl],
        {j,m},{i,2,n-1,2}];
Chop[weightMatrixWIM1]//MatrixForm
```



```
( 1      1      0      1      0 )
1  0.978148  0.207912  0.913545  0.406737
1  0.913545  0.406737  0.669131  0.743145
1  0.809017  0.587785  0.309017  0.951057
1  0.669131  0.743145 -0.104528  0.994522
1    0.5    0.866025   -0.5    0.866025
1  0.309017  0.951057 -0.809017  0.587785
1  0.104528  0.994522 -0.978148  0.207912
1 -0.104528  0.994522 -0.978148 -0.207912
1 -0.309017  0.951057 -0.809017 -0.587785
1   -0.5    0.866025   -0.5   -0.866025
1 -0.669131  0.743145 -0.104528 -0.994522
1 -0.809017  0.587785  0.309017 -0.951057
1 -0.913545  0.406737  0.669131 -0.743145
1 -0.978148  0.207912  0.913545 -0.406737
1   -1.      0      1.      0
1 -0.978148 -0.207912  0.913545  0.406737
1 -0.913545 -0.406737  0.669131  0.743145
1 -0.809017 -0.587785  0.309017  0.951057
1 -0.669131 -0.743145 -0.104528  0.994522
1   -0.5   -0.866025   -0.5   0.866025
1 -0.309017 -0.951057 -0.809017  0.587785
1 -0.104528 -0.994522 -0.978148  0.207912
1  0.104528 -0.994522 -0.978148 -0.207912
1  0.309017 -0.951057 -0.809017 -0.587785
1    0.5   -0.866025   -0.5   -0.866025
1  0.669131 -0.743145 -0.104528 -0.994522
1  0.809017 -0.587785  0.309017 -0.951057
1  0.913545 -0.406737  0.669131 -0.743145
1  0.978148 -0.207912  0.913545 -0.406737 )
```

解が連続関数で表される場合 モデルの電流分布の関数を定義する。

```
sourceFunc[x_]=1-Cos[2Pi x/fl];
```

図 2 にモデルソース分布を示す。

```
modelFieldSourceOriginal=
```

```
Table[sourceFunc[i*diTarget],{i,m}];
```

```
modelSourceContG=
```

```
ListPlot[modelFieldSourceOriginal, PlotRange -> All,
```

```
Prolog -> AbsolutePointSize[4],
```

```
AxesLabel -> {"Pos.", "Ampere"},
```

```
PlotLabel -> "Model source"];
```

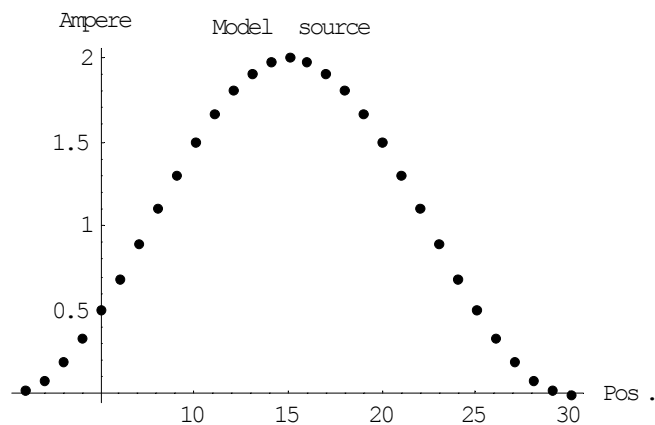


図 2.モデル電流分布

測定される磁界ベクトルを計算し、図 3 に示す。

```
fieldCont1=systemMatrix1.modelFieldSourceOriginal;
measuredFieldG=ListPlot[fieldCont1,
    PlotJoined -> True,PlotRange->All,
    PlotLabel->"Measured field",AxesLabel->{"Pos.,"Field H[A/m]"}];
```

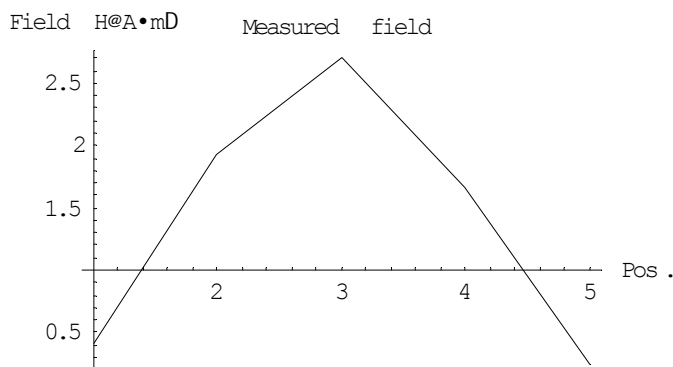


図 3.測定される磁界分布

WIM 解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionCont1=
    weightMatrixWIM1.(orderVector=
        coefficientVector[systemMatrix1,fieldCont1,weightMatrixWIM1]);]
{0.06 Second,Null}
```

方程式を満足する解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[fieldCont1-systemMatrix1.weightenSolutionCont1]]
0
```

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。

図 4 に 解ベクトル を示す。

```
solutionContWIMG1=
```

```
ListPlot[weightenSolutionCont1,PlotRange->All,  
PlotJoined->True,  
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},  
PlotLabel->"WIM solution"];
```

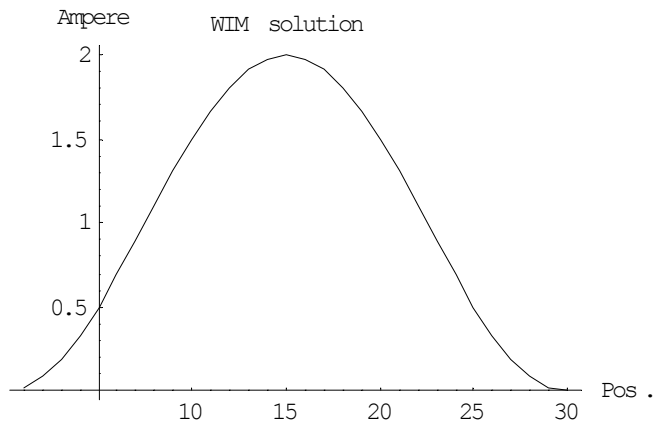


図 4.WIM 解

図 5 に正解と WIM 解の比較を示す。図 4 の WIM 法は正しい結果を与えていることがわかる。

```
Show[modelSourceContG,solutionContWIMG1,  
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

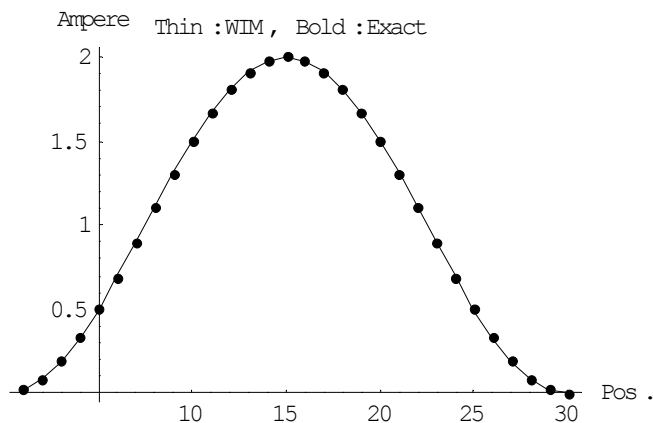


図 5.正解と WIM 解の比較

WIM 法は解を三角関数の第 2 高調波の第 5 項までで表現可能な関数と仮定している。第 5 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N  
{1.,-0.978148,0.207912,0,0}
```

正解は{1,-1,0,0,0}であるから、ほぼモデルソースの係数が得られている。

**解が不連続関数で表される場合** モデルの電流分布の関数を定義する。図 6 による不連続なモデルソース分布を考える。

```

mm=8;
modelDiscontFieldSourceOriginal=
  Join[Table[0,{i,mm}],Table[1,{i,m-2 mm}],Table[0,{i,mm}]];
modelSourceDiscontG=
  ListPlot[modelDiscontFieldSourceOriginal,
    PlotRange -> All, Prolog -> AbsolutePointSize[4],
    AxesLabel -> {"Pos.", "Ampere"},
    PlotLabel -> "Model source"];

```

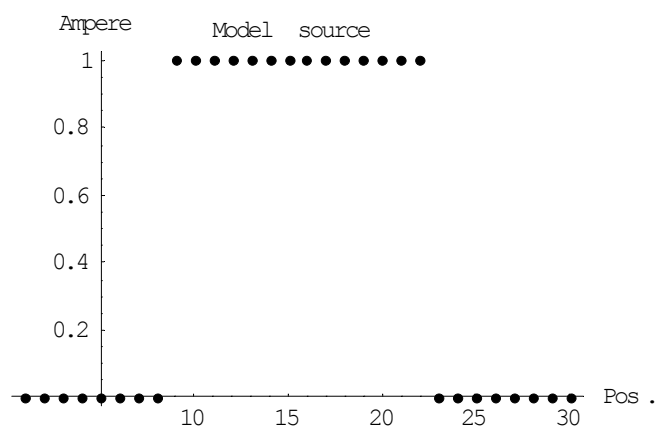


図 6.不連続点を含むモデル電流分布

測定される磁界ベクトルを計算し、図 7 に示す。

```

fieldDiscont1=systemMatrix1.modelDiscontFieldSourceOriginal;
measuredFieldG=ListPlot[fieldDiscont1,
  PlotRange->All,PlotJoined->True,
  PlotLabel->"Measured field",AxesLabel->{"Pos.", "Int."}];

```

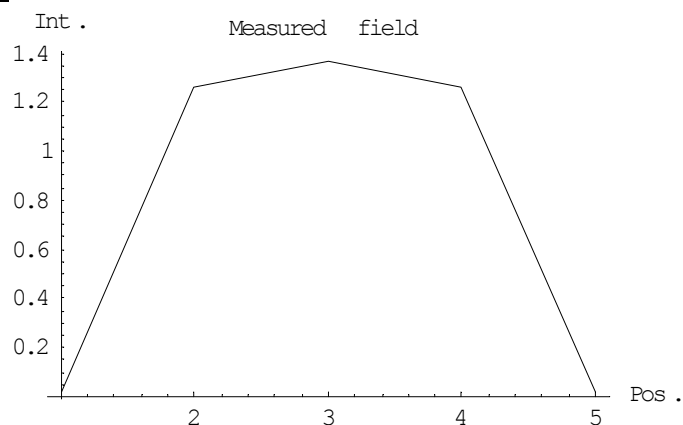


図 7.測定される磁界分布

WIM 解を計算する。

```

Timing[weightenSolutionDiscont1=

```

```
weightMatrixWIM1.(orderVector=
  coefficientVector[systemMatrix1,fieldDiscont1,weightMatrixWIM1]);]
{0. Second,Null}
```

解ベクトルが方程式を満足するかを調べるため、解ベクトルをシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[fieldDiscont1-systemMatrix1.weightenSolutionDiscont1]]
0
```

確かに解ベクトルは方程式を満足している。解ベクトルを図 8 に示す。

```
solutionDiscontWIMG1=
  ListPlot[weightenSolutionDiscont1,PlotRange->All,
    PlotJoined->True,
    AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
    PlotLabel->"WIM solution"];
```

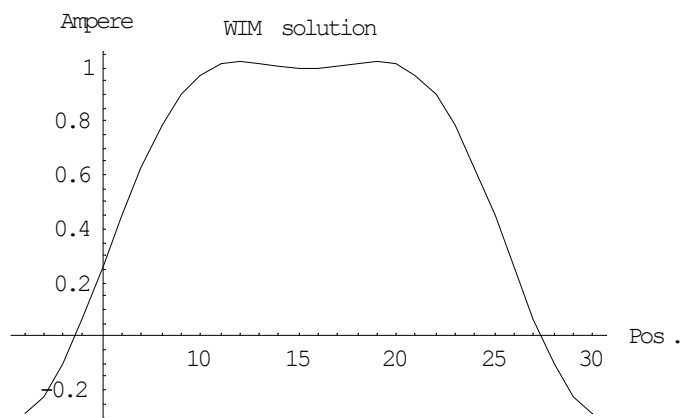


図 8.WIM 解

図 9 に正解と WIM 解の比較を示す。WIM 解は方程式を満足する解であるが、不連続点を含むソースの場合、近似解となる。

```
Show[modelSourceDiscontG,solutionDiscontWIMG1,
  PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

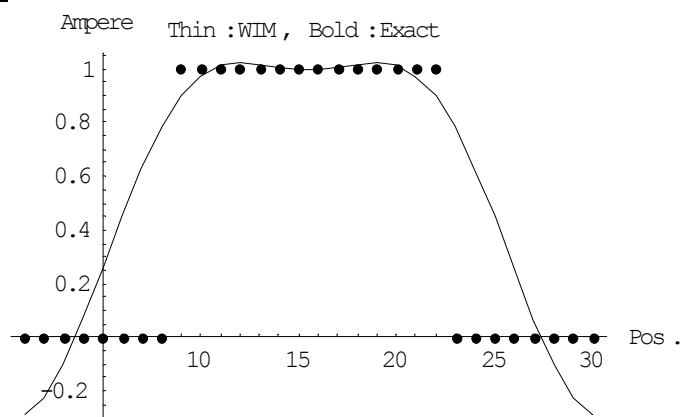


図 9.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

WIM 法は解を三角関数の第 5 項までで表現可能な関数と仮定している。第 5 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
```

```
{0.566353,-0.639278,0.0671909,-0.212975,0.0452693}
```

となり、係数の絶対値は徐々に小さくなり解は収束してようである。図 9 からわかるように、正解でないが比較的良好な近似解を与えている。

**<d>不連続関数を使った重み付き逆行列法** 物理的に存在する解は通常、解の存在する空間の連続関数で表現される。しかし、実際の計算では離散化を行うため、離散値系で計算される。このため、重み関数として不連続な関数を使うことが可能となる。ここでは、図 10 に示すワルシュ(Walsh)関数を展開関数とする。

```
ListPlot[Table[1,{m}],
```

```
PlotJoined->True,AxesLabel->{"Pos.,"f[x]"},
```

```
PlotLabel->"Function 0th order"];
```

```
Do[
```

```
ListPlot[Table[Sign[Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl]],{j,m}],
```

```
PlotJoined->True,AxesLabel->{"Pos.,"f[x]"},
```

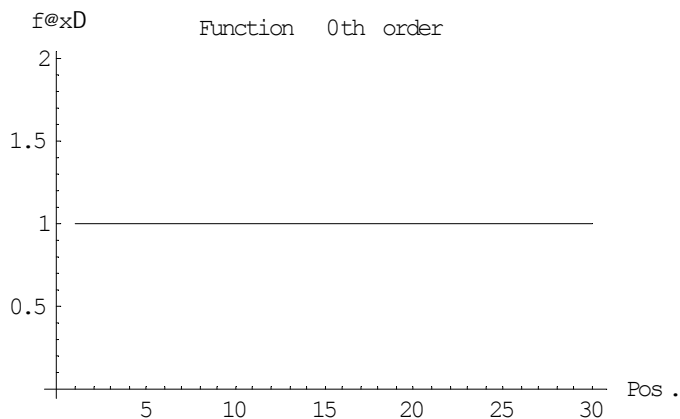
```
PlotLabel->StringForm["Function `1`th order even",i/2]];
```

```
ListPlot[Table[Sign[Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl]],{j,m}],
```

```
PlotJoined->True,AxesLabel->{"Pos.,"f[x]"},
```

```
PlotLabel->StringForm["Function `1`th order odd",i/2]],
```

```
{i,2,n-1,2}];
```



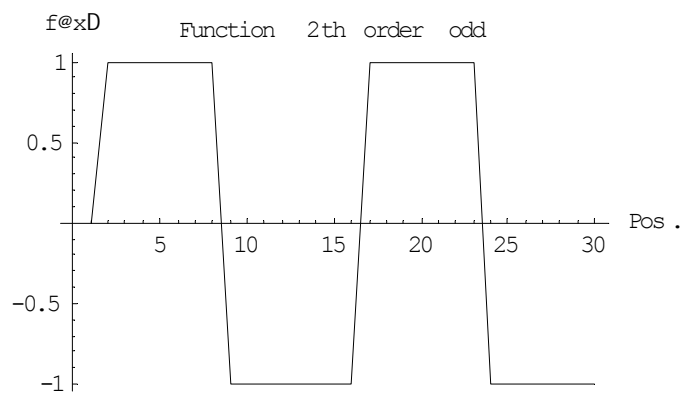
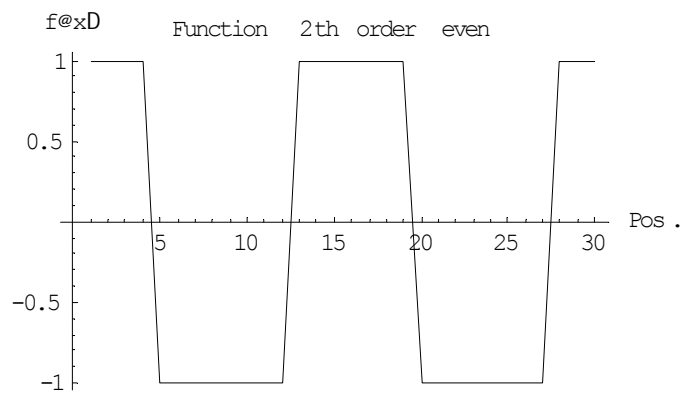
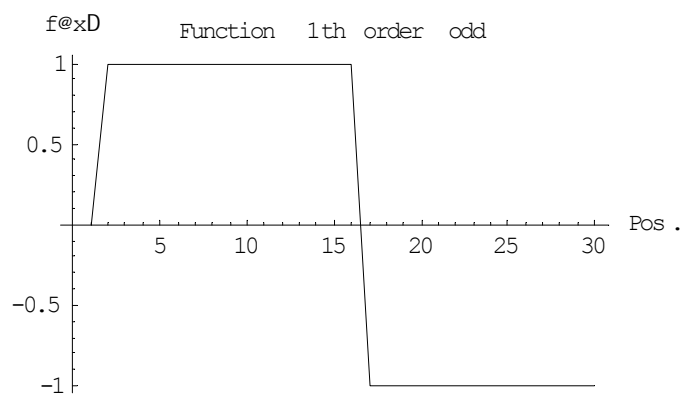
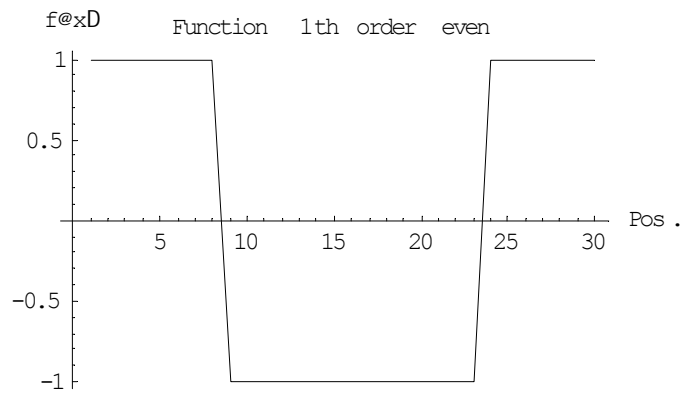


図 10.不連続な展開(ワルシュ)関数

図 10 の関数を使って重み行列を作成する。

```
weightMatrixWIM2=Table[0.,{j,m},{i,n}];
Do[weightMatrixWIM2[[j,1]]=1,{j,m}];
Do[
    weightMatrixWIM2[[j,i]]=Sign[Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl]];
    weightMatrixWIM2[[j,i+1]]=Sign[Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl]],
    {j,m},{i,2,n-1,2}];
Chop[weightMatrixWIM2]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解が連続関数で表される場合 WIM 解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionCont2=
    weightMatrixWIM2.(orderVector=
```



```
coefficientVector[systemMatrix1,fieldCont1,weightMatrixWIM2]);]
```

```
{0.06 Second,Null}
```

方程式を満足する 解ベクトルが得られたかを調べるため、 解ベクトルをシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[fieldCont1-systemMatrix1.weightenSolutionCont2]]
```

```
0
```

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。

図 11 に WIM 解を示す。

```
solutionCont2WIMG=
```

```
ListPlot[weightenSolutionCont2,PlotRange->All,  
PlotJoined->True,  
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},  
PlotLabel->"WIM solution"];
```

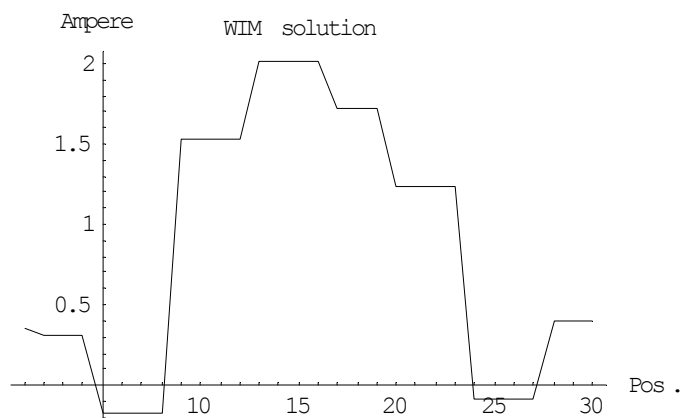


図 11.WIM 解

図 12 に正解と WIM 解の比較を示す。図 11 の WIM 解は方程式を満足する解であるが、重み関数を不連続関数としたため、WIM 法は連続関数で表される解の近似解を与える。

```
Show[modelSourceContG,solutionCont2WIMG,
```

```
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

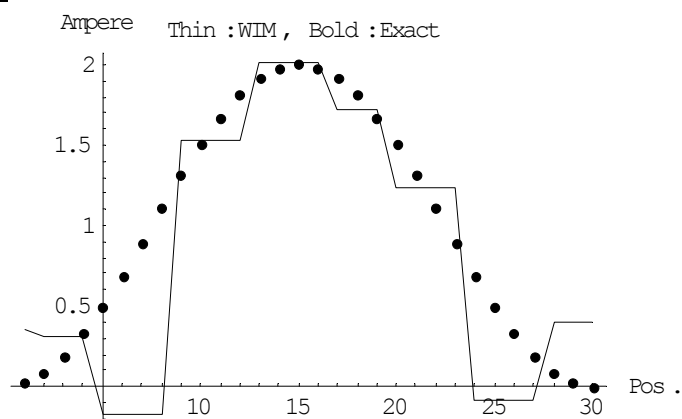


図 12.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

WIM 法は解をワルシュ関数の第 5 項までで表現可能な関数と仮定している。第 5 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
{0.865991,-0.753817,0.0529532,0.243735,-0.093579}
```

遇関数の係数は単調収束しているため、近似解を与えていることが確認できる。

解が不連続関数で表される場合 WIM 解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionDiscont2=
weightMatrixWIM2.(orderVector=
coefficientVector[systemMatrix1,fieldDiscont1,weightMatrixWIM2]);]
{0. Second,Null}
```

方程式を満足する解ベクトルが得られたかを調べるため、解ベクトルをシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[fieldDiscont1-systemMatrix1.weightenSolutionDiscont2]]
0
```

確かに解ベクトルは方程式を満足している。解ベクトルを図 13 に示す。

```
solutionDinscont2WIMG=
ListPlot[weightenSolutionDiscont2,PlotRange->All,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
PlotLabel->"WIM solution"];
```

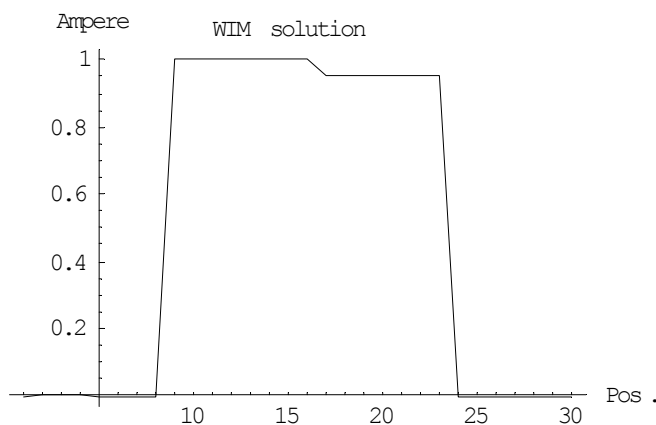


図 13.不連続な関数を重み関数とした WIM 解

図 14 に正解と WIM 解の比較を示す。WIM 解は与えられた式を満足する解であり、重み関数を不連続関数で作成した場合、不連続点を含む解に対して良好な近似解を与える。

```
Show[modelSourceDiscontG,solutionDinscont2WIMG,
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

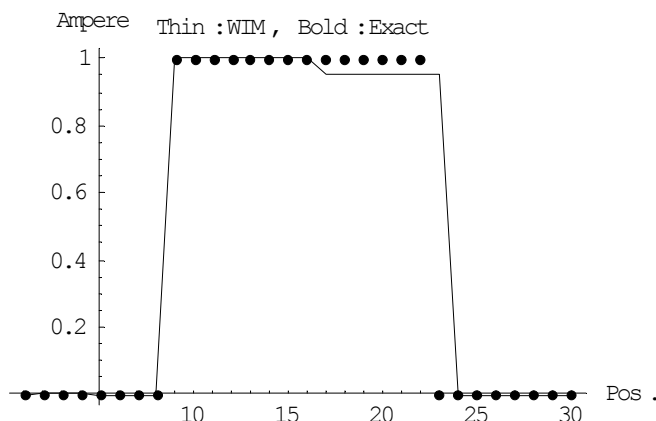


図 14.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

WIM 法は解をワルシュ関数の第 5 項までで表現可能な関数と仮定している。第 5 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
```

```
{0.48707,-0.489897,0.0129254,0.00121913,-0.0112439}
```

となり、係数の絶対値は確実に収束している。従って、図 13,14 の解は正しいと考えて良い。

<e>測定点数  $n$  の増加 測定点数  $n$  を増加して解の精度が向上することを確認する。

```
n=21;          djMeasure=ol/n;
```

モデルのシステム行列を作成する。

```
systemMatrix2=
```

```
Table[greenFuncComp[i,j,diTarget,djMeasure,ofs],{j,n},{i,m}];
```

重み関数を連続関数（三角関数） 定数項、正弦波、および余弦波を用いて重み行列を作成する。

```
weightMatrixWIM3=Table[0.,{j,m},{i,n}];
```

```
Do[weightMatrixWIM3[[j,1]]=1,{j,m}];
```

```
Do[
```

```
weightMatrixWIM3[[j,i]]=Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl];
```

```
weightMatrixWIM3[[j,i+1]]=Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl],
```

```
{j,m},{i,2,n-1,2}];
```

解が連続関数で表される場合 まず、与えられる磁界分布を計算する。

```
fieldCont2=systemMatrix2.modelFieldSourceOriginal;
```

WIM 法で解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionCont3=
```

```
weightMatrixWIM3.(orderVector=
```

```
coefficientVector[systemMatrix2,fieldCont2,weightMatrixWIM3]);]
```

```
{0.05 Second,Null}
```

WIM 解を図 15 に示す。

```
solutionCont3WIMG=
```

```
ListPlot[weightenSolutionCont3,PlotRange->All,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
PlotLabel->"WIM solution"];
```

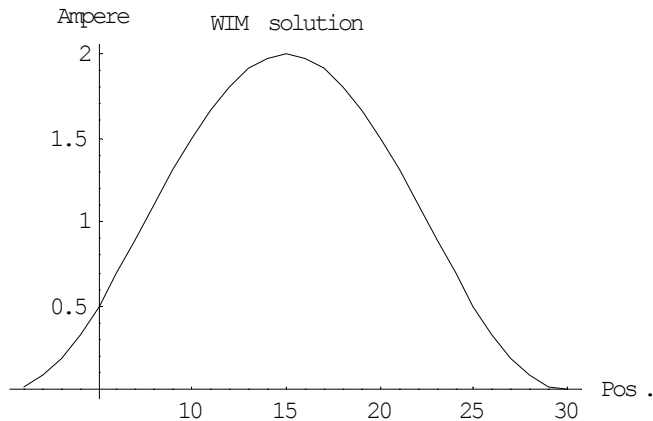


図 15. WIM 解

正しい解との比較を図 16 に示す。

```
Show[modelSourceContG,solutionCont3WIMG,
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

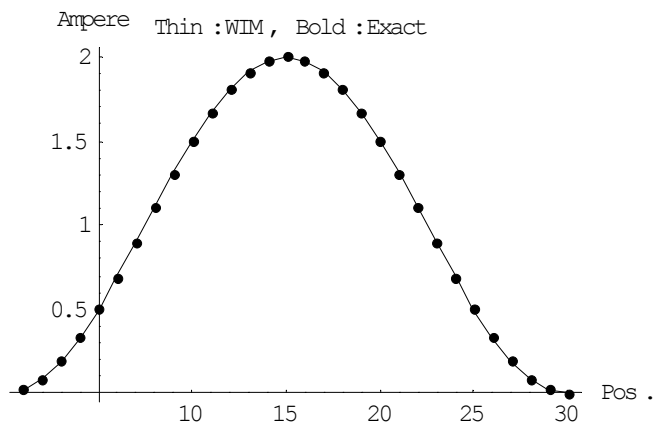


図 16.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

WIM 法は解を三角関数の第 21 項までで表現可能な関数と仮定している。第 21 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
```

```
{1.,-0.978148,0.207912,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
```

第 3 項までで完全に収束している。従って、WIM 解は正しいと考えて良い。

解が不連続関数で表される場合 不連続なソースが与える磁界分布を計算する。

```
fieldDiscont2=systemMatrix2.modelDiscontFieldSourceOriginal;
```

WIM 法で解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionDiscont3=
  weightMatrixWIM3.(orderVector=
    coefficientVector[systemMatrix2,fieldDiscont2,weightMatrixWIM3]);]
{0.06 Second,Null}
```

方程式を満足する解ベクトルが得られたかを調べるため、解ベクトルをシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[fieldDiscont2-systemMatrix2.weightenSolutionDiscont3]]
0
```

確かに解ベクトルは与えられた方程式を満足している。WIM 解を図 17 に示す。

```
solutionDinscont3WIMG=
  ListPlot[weightenSolutionDiscont3,PlotRange->All,
    PlotJoined->True,
    AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
    PlotLabel->"WIM solution"];
```

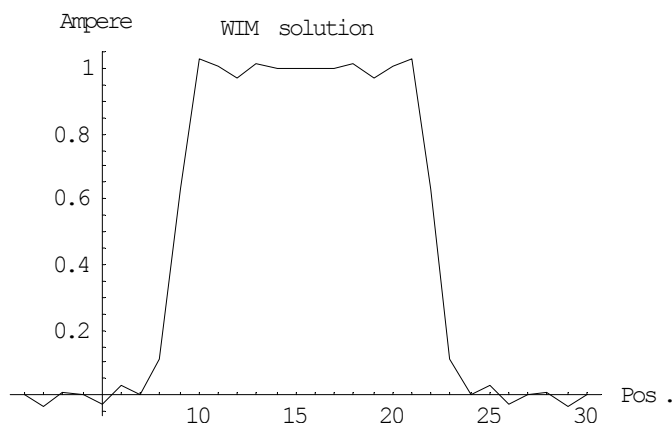


図 17.連続関数を重み関数とした WIM 解

図 18 に正解と WIM 解の比較を示す。WIM 解は方程式を満足し、重み関数を連続関数から作成しているにも拘わらず、測定点数を増加した WIM 解は不連続点を含む解の良好な近似を与えている。

```
Show[modelSourceDiscontG,solutionDinscont3WIMG,
  PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

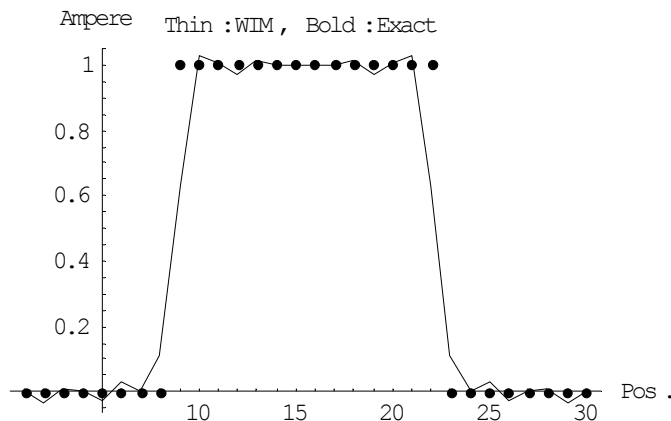


図 18.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

WIM 法は解を、定数項と正弦波、余弦波の第 10 次高調波までの和で表されると仮定している。第 21 項までの係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
```

```
{0.449385,-0.624229,0.0656091,0.0882653,-0.0187614,0.166232,-0.0540119,-0.0742962,0.0330788,-0.0657482,0.0379597,0.0569947,-0.0414091,0.019112,-0.0172085,-0.0374627,0.0416065,0.00522044,-0.00718532,0.019254,-0.0333489}
```

正弦波と余弦波、何れも振動的であるが、収束している。従って、WIM 解は近似解として妥当であると考えられる。

重み関数が不連続関数で表される場合      ワルシュ関数を用いて重み行列を作成する。

```
weightMatrixWIM4=Table[0.,{j,m},{i,n}];
Do[weightMatrixWIM4[[j,1]]=1,{j,m}];
Do[
    weightMatrixWIM4[[j,i]]=Sign[Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl]];
    weightMatrixWIM4[[j,i+1]]=Sign[Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl]],
    {j,m},{i,2,n-1,2}];
```

解が連続関数で表される場合      WIM 法で解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionCont4=
    weightMatrixWIM4.(orderVector=
        coefficientVector[systemMatrix2,fieldCont2,weightMatrixWIM4]);]
{0. Second,Null}
```

WIM 解を図 19 に示す。

```
solutionCont4WIMG=
    ListPlot[weightenSolutionCont4,PlotRange->All,
        PlotJoined->True,
        AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
```

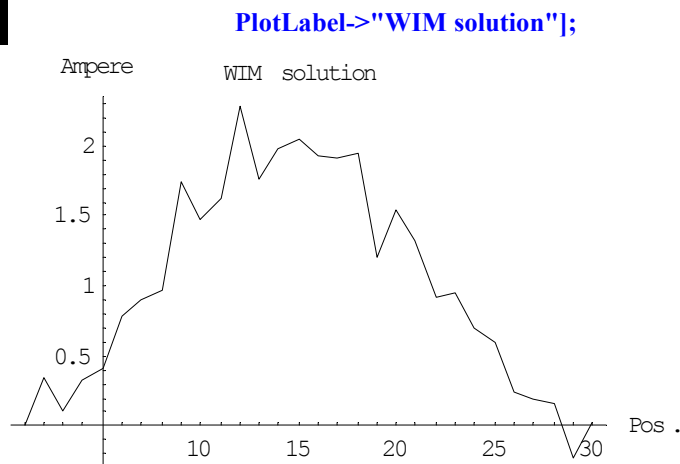


図 19. WIM 解

正しい解との比較を図 20 に示す。重み関数を不連続関数で作成しているため、解の滑らかな補間ができない。しかし、図 11,12 と比較すれば、測定点数  $n$  の増加が解の精度を向上させていることがわかる。

```
Show[modelSourceContG,solutionCont4WIMG,
```

```
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact";
```

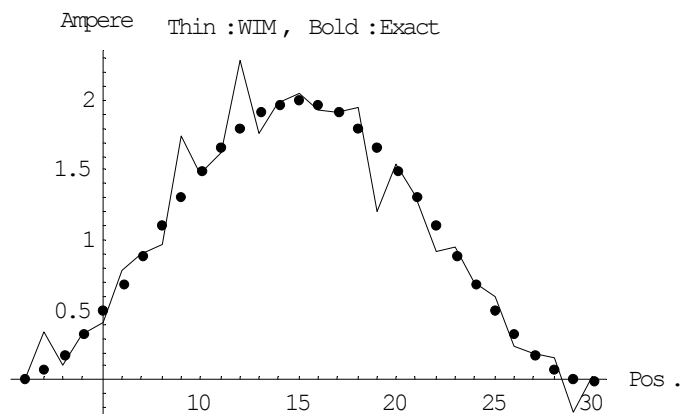


図 20.正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較

補間関数の係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]/N
```

```
{0.953389,-0.743835,0.21003,-0.0125747,-0.0274476,-0.224622,-0.0444744,0.0286574,0.0351698,0.164539,-0.0313153,0.0361351,0.0551409,-0.108952,-0.030012,0.0258292,0.0518441,-0.01212,0.0129351,-0.103229,-0.0676328}
```

振動的であるが収束している。従って、WIM 解は近似解であると考えられる。  
解が不連続関数で表される場合 WIM 法で解を計算する。

```
Timing[weightenSolutionDiscont4=
```

```
weightMatrixWIM4.(orderVector=
```

```
coefficientVector[systemMatrix2,fieldDiscont2,weightMatrixWIM4]);]
```

**{0.05 Second,Null}**

方程式を満足する解ベクトルが得られたかを調べるため、解ベクトルをシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

**Max[Chop[fieldDiscont2-systemMatrix2.weightenSolutionDiscont4]]**

**0**

であるから、解ベクトルはシステム方程式を満足している。

WIM 解を図 21 に示す。

**solutionDinscont4WIMG=**

```
ListPlot[weightenSolutionDiscont4,PlotRange->All,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
PlotLabel->"WIM solution"];
```

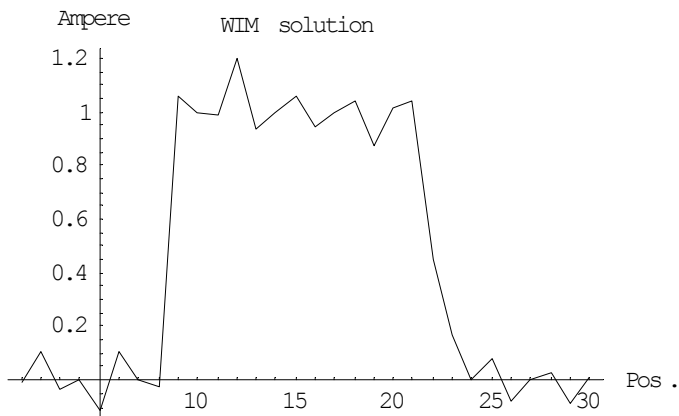


図 2 1.不連続関数を重み関数とした WIM 解

図 22 に正解と WIM 解の比較を示す。重み行列を不連続関数から導き、不連続点を含む解を求めた場合、測定点数  $n$  の増加は解精度の向上に繋がっているが、本質的に不連続点は除けない。

**Show[modelSourceDiscontG,solutionDinscont4WIMG,**

```
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

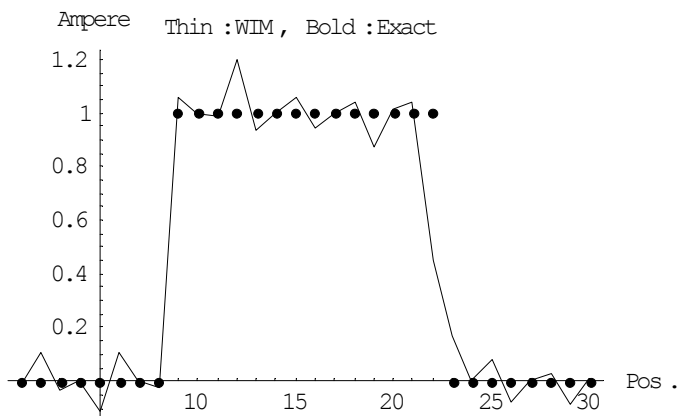




図 2.2. 正解(ドット)と WIM 解(細線)の比較  
解の係数を調べてみよう。

```
Chop[orderVector]//N
```

```
{0.405318,-0.480154,0.0811994,0.06022,-0.0244777,-0.0200284,-0.0704014,-0.0396302,0.0539748,0.08  
08885,0.0296726,0.0718533,-0.0114369,-0.0531337,-0.0182238,0.0105879,0.0656038,0.0137248,0.0187  
894,-0.0573925,-0.0730231}
```

振動的であるが収束しているから、近似解が得られていることがわかる。

#### 4.3.4 まとめ

本章では関数から重み行列を作成する関数型重み付き逆行列法を述べた。関数型重み付き逆行列法は、式の数に等しい一意的な解要素から残りの解要素を関数で補間することを目的としている。このため、重み行列を作成するための基底関数に連続関数と不連続関数、何れでも採用することが可能である。しかし、連続関数を基底関数とした重み付き逆行列法が良好な収束性を示すことが確認された。

## 4.4 重み付き逆行列法におけるノイズ処理

### 4.4.1 概要

逆問題は局所的な出力から入力、媒質のパラメータ、さらに入出力間の伝達規則を探索する問題である。何れでも局所的な出力に相当する情報を得ることが大前提である。この大前提とする局所的な情報は本来の情報とは異なる情報、すなわち、ノイズが混入する。このようなノイズが含有した情報に対する重み付き逆行列法の解の性質を吟味し、ノイズの解に対する影響を如何に削減可能かを検討するのが本章の課題である。

第 4.2 は重み付き逆行列法の原理を述べ、第 4.3 では関数系から重み行列を決定する方法を述べ、重み付き逆行列法の有用性を確認した。しかし、現実の物理的な問題へ適用するには、実際に計測された情報を前提としなければならない。実際の物理系の測定では誤差が必然的に伴う。従って、実際の問題に重み付き逆行列法を適用するには、測定誤差に起因するノイズを処理する方法論を確立する必要がある。本章では重み付き逆行列法におけるノイズの解に対する影響とノイズの解へ対する影響を削減する方法を検討する。

### 4.4.2 ノイズ処理

逆問題は、局所的な情報に対応する式の数  $n$  よりも多い情報源に対応する未知数の数  $m$  を持つ線形システムを解くことに帰する。一意的に決まる解ベクトルの次数は式の数  $n$  に等しく、未知数の数  $m$  から式の数  $n$  を引き算した数  $(m-n)$  個の解は一意的に決まった  $n$  個の解に従属して決まる。

$n$  個の情報に重畳し得るノイズの最大変化率は  $n-1$  次である。例えば、1 個の情報には定数の誤差しか重畳できない。2 個の情報には定数と 1 次関数的変化を持つ情報しか重畳できない。このことから、与えられた情報を予め期待する解の変化率へ平滑化する方法、すなわち、情報の前処理(pre-processing)によるノイズの削減法とノイズを含んだ情報から解を求め、解からノイズの影響を削減する後処理(post-processing)法が考えられる。何れの方法においても解にどの程度の変化率を期待するかが最大の課題である。

本稿では、まず、最初に与えられる情報の個数  $n$  と解へ対するノイズの影響を調べる。次に情報の前処理と解の後処理によるノイズの影響を削減する方法について検討する。

式の数が  $n$ 、式の数より多い未知数  $m$  を持つ不適切な線形システムは、 $C$  を  $n$  行  $m$  列の係数行列として、(1)式で与えられる。

$$Y=CX \quad (1)$$

(1)式の解は  $W$  を  $m$  行  $n$  列の重み行列として、解ベクトル  $X$  が次式で与えられると仮定する。

$$X=WS \quad (2)$$

$\mathbf{S}$  は  $n$  次の列ベクトルである。

解ベクトル  $\mathbf{X}$  が(2)式で与えられ、行列  $CW$  が非特異行列である場合、重み付き逆行列法は次式の解を与える。

$$\mathbf{X} = W[CW]^{-1} \mathbf{Y} \quad (3)$$

(3)式で、与えられた情報であるベクトル  $\mathbf{Y}$  が、正しい情報ベクトル  $\mathbf{Y}_e$  とノイズベクトル  $\mathbf{Y}_n$  からなるとすれば、(3)式は

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= W[CW]^{-1} (\mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_n) \\ &= \mathbf{X}_e + \mathbf{X}_n \end{aligned} \quad (3)$$

であるから、重み付き逆行列法は、既知情報ベクトル  $\mathbf{Y}$  に含まれる正解とノイズ大きさに比例して解ベクトル  $\mathbf{X}$  へノイズの影響が反映することとなる。

#### 4.4.3 1次元電流探索問題におけるノイズ処理

<a>計算の準備 メモリーの少ない機械を使う場合は下記のメモリの節約コマンドを入れる。続いて、線形代数さらにグラフィックスのパッケージを入れる。尚、これらの命令は複数回入れるとエラーになるから注意すべきこと。

```
<<Utilities`MemoryConserve`
```

```
$MemoryIncrement=100000;
```

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
```

```
Off[General::spell1,MemoryConserve::start,MemoryConserve::end];
```

重み付き逆行列法の係数ベクトルを計算する関数を定義しておく。

```
coefficientVector=
```

```
Compile[{{systemMatrix,_Real,2},{inPut,_Real,1},
```

```
{weightMatrix,_Real,2}},
```

```
Inverse[systemMatrix.weightMatrix].inPut];
```

<b>モデルの設定 ここでは、図 1 に示すように接線方向磁界の測定から電流を探索する例題を考える。

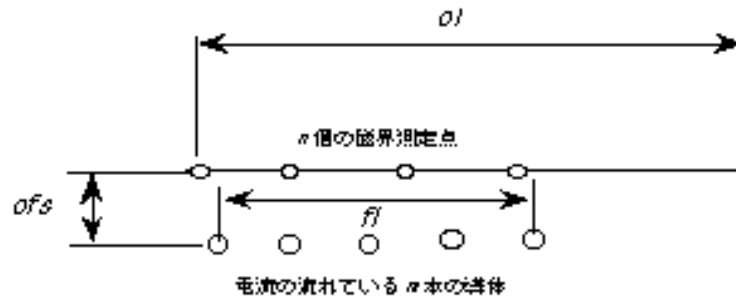


図 1.磁界測定から電流を探索するモデル

アンペアの法則  $H=i/(2\pi r)$  を用いて、距離に関する関数を定義する。i と j はそれぞれ、フィルムと測定点の位置を示す。hiGht はセンシング部分の高さである。

```
greenFuncComp=
    Compile[{i, j, filmSubDiv, measureSubDiv, hiGht},
        coeffiCient=hiGht/(2*Pi);
        distanceSquared=(j*measureSubDiv-0.5*measureSubDiv -
            i*filmSubDiv+0.5*filmSubDiv)^2 + hiGht^2;
        coeffiCient/distanceSquared];
```

計算に使用する諸定数を与えておく。ターゲットと測定面の長さをそれぞれ 1.0m とする。さらに、測定面と対象面間の距離を ofs=1mm とする。

```
fl=1.0; ol=1.0; ofs=0.001;
```

モデルの電流分布の関数を定義する。

```
sourceFunc[x_]=1-Cos[2Pi x/fl];
```

#### <a>ノイズの解へ与える影響

測定点数が少ない場合 測定点数 n とソースの離散化個数 m 測定点数 n は、偶(even)関数と奇(odd)関数が同一次数をとるために、定数項+偶関数+奇関数の和が奇数であるから、常に奇数でなければならない。ここでは、測定点数を n=5 点、解の離散化個数 m を 50 とする。この場合、解が持ち得る最大の変化率は n-1=4 次である。

```
n=5; djMeasure=ol/n;
```

```
m=50; diTarget=fl/m;
```

システム行列と重み行列 モデルのシステム行列を作成する。

```
systemMatrix1=
    Table[greenFuncComp[i,j,diTarget,djMeasure,ofs],{j,n},{i,m}];
```

三角関数を用いて重み行列を作る。

```
weightMatrixWIM1=Table[0.,{j,m},{i,n}];
Do[weightMatrixWIM1[[j,1]]=1,{j,m}];
```

```

Do[      weightMatrixWIM1[[j,i]]=Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl];
        weightMatrixWIM1[[j,i+1]]=Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl],
    {j,m},{i,2,n-1,2}];

```

モデルソース 正解のモデルソースを作成し、図 2 にモデルソース分布を示す。

```

modelFieldSourceOriginal=
    Table[sourceFunc[i*diTarget],{i,m}];
modelSourceContG=
    ListPlot[modelFieldSourceOriginal,
        PlotRange -> All,
        Prolog -> AbsolutePointSize[4],
        AxesLabel -> {"Pos.", "Ampere"},
        PlotLabel -> "Model source"];

```

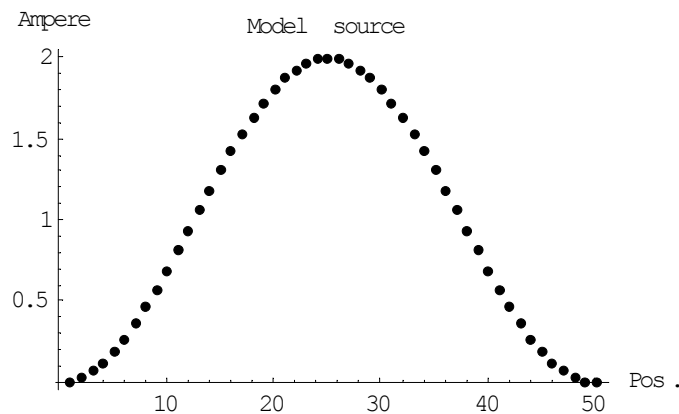


図 2.モデル電流分布

ノイズを含まない WIM 解 ノイズを含まない理想的な磁界ベクトルを計算する。

```

fieldCont1=systemMatrix1.modelFieldSourceOriginal;
    ノイズを含まない磁界ベクトルから WIM 解を計算し、図 3 に示す。
Timing[weightenSolutionCont1=
    weightMatrixWIM1.(orderVector=
        coefficientVector[systemMatrix1,fieldCont1,
            weightMatrixWIM1]);]
{0.06 Second,Null}
ListPlot[weightenSolutionCont1,
    PlotJoined -> True,PlotRange->All,
    PlotLabel->"Noiseless solution",
    AxesLabel->{"Pos.,"Current [A]"}];

```

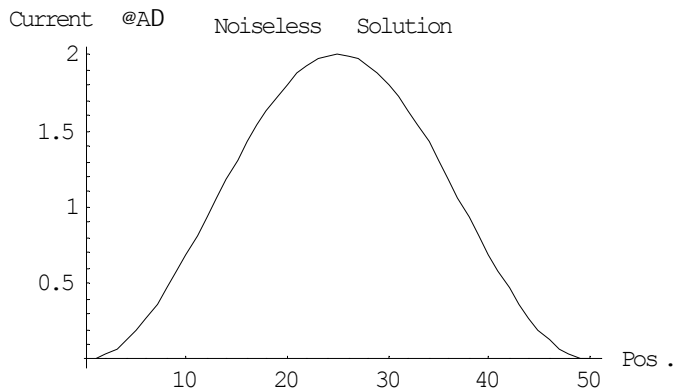


図 3. ノイズを含まない WIM 解

**ノイズ磁界による WIM 解** 測定される磁界ベクトルはノイズを含まない正しい磁界の最大絶対値の 10% を最大振幅とするノイズを含むとする、図 4 に乱数で作成したノイズを示す。

```
noiseFieldCont1=
    Table[0.1 Abs[Max[fieldCont1]] Random[Real,{-1.,1.},{n}];
ListPlot[noiseFieldCont1,
    PlotJoined -> True, PlotRange->All,
    PlotLabel->"Noise field", AxesLabel->{"Pos.", "Field H[A/m]"}];
```

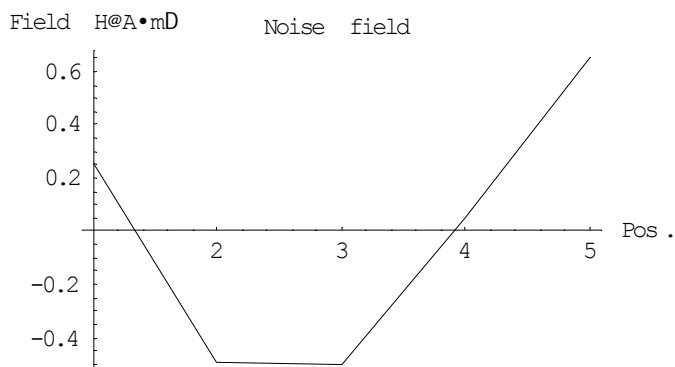


図 4. ノイズ磁界

図 4 のノイズ磁界による WIM 解を計算する。

```
Timing[noiseSolutionCont1=
    weightMatrixWIM1.(orderVector=
        coefficientVector[systemMatrix1,noiseFieldCont1,
            weightMatrixWIM1]);]
{0. Second, Null}
```

図 4 のノイズ磁界による WIM 解を図 5 に示す。

```
ListPlot[noiseSolutionCont1,
```

```
PlotJoined->True,PlotRange->All,
PlotLabel->"Noise field",AxesLabel->{"Pos.,"Noise source [A]"}];
```

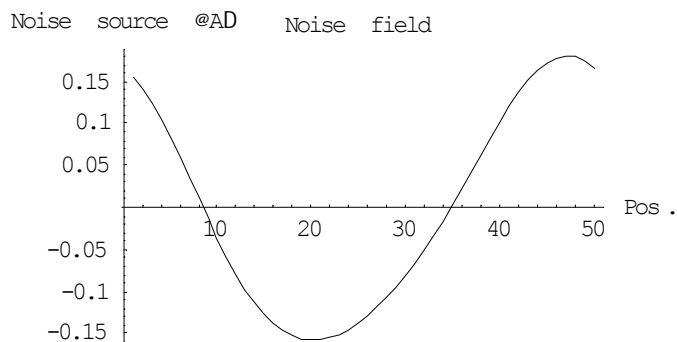


図 5.ノイズ磁界源となる電流

図 5 のノイズ磁界源となる電流の平均値は

```
Apply[Plus,noiseSolutionCont1]/Length[noiseSolutionCont1]
-0.00130366
```

であるから、ノイズ磁界源となる電流の平均値はゼロに近い性質を持つことがわかる。

**ノイズを含む WIM 解** 図 4 のノイズを含んだ磁界ベクトルを作成する。

```
noisyFieldCont1=noiseFieldCont1+fieldCont1;
```

ノイズを含んだ磁界から WIM 解を計算する。

```
Timing[noisyWIMSolutionCont1=
weightMatrixWIM1.(orderVector=
coefficientVector[systemMatrix1,noisyFieldCont1,
weightMatrixWIM1]);]
{0. Second,Null}
```

図 6 にノイズを含んだ磁界から計算された解ベクトルを示す。

```
solutionContWIMG1=
ListPlot[noisyWIMSolutionCont1,
PlotRange->All,PlotJoined->True,
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
PlotLabel->"WIM solution"];
```

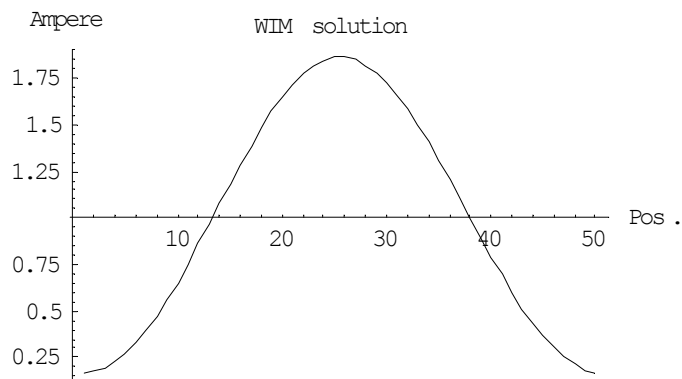


図 6. ノイズを含んだ磁界から計算された WIM 解

図 7 に正解とノイズを含んだ磁界から計算された WIM 解の比較を示す。

```
Show[modelSourceContG,solutionContWIMG1,
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

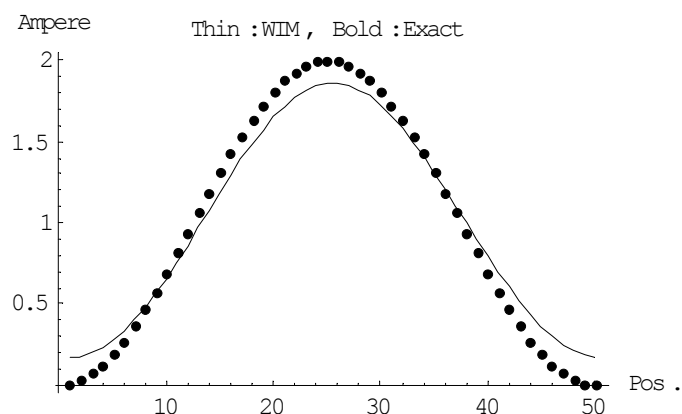


図 7. 正解とノイズを含んだ解の比較

図 7 の結果から測定点数  $n$  が少ない場合、ノイズの影響は比較的少ないと考えられる。

**ノイズの与える WIM 解への影響** 図 5 のノイズを含んだ磁界から計算された解がノイズを含まない磁界から計算された図 3 の解とノイズ磁界から計算された図 5 の解の和に等しいかを調べよう。

```
Max[Abs[Chop[noisyWIMSolutionCont1-
weightenSolutionCont1-noiseSolutionCont1]]]
0
```

完全にノイズと正しい磁界の和による解がノイズを重畳した解になることが確認できた。次に、磁界に含まれるノイズの割合と解に含まれるノイズの割合を比較する。

まず、正しい磁界とノイズ磁界、それぞれの最大絶対値の比は

```
fieldRatio1=Max[Abs[noiseFieldCont1]]/Max[Abs[fieldCont1]]
0.0855694
```

である。



これに対して、正しい磁界とノイズ磁界、それぞれに起因する電流の最大絶対値の比は

```
sourceRatio1=Max[Abs[noiseSolutionCont1]]/Max[Abs[weightenSolutionCont1]]
0.0903711
```

である。この両者の比が一致しないのは、一意的に決まる  $n=5$  個の解に従属して  $m-n=55$  個の解が決定されているためである。すなわち、従属する解によってノイズの影響が拡大されている。この拡大する割合は

```
sourceRatio1/fieldRatio1
1.05611
```

である。

**測定点数を増加した場合** 測定点数を  $n=45$  点、解の個数  $m$  を 50 とする。この場合、解が持ち得る最大の変化率は  $n-1=44$  次である。

```
n=45; djMeasure=ol/n;
```

**システム行列と重み行列** モデルのシステム行列を作成する。

```
systemMatrix2=
Table[greenFuncComp[i,j,diTarget,djMeasure,ofs],{j,n},{i,m}];
```

三角関数を用いて重み行列を作る。

```
weightMatrixWIM2=Table[0.,{j,m},{i,n}];
Do[weightMatrixWIM2[[j,1]]=1,{j,m}];
Do[
weightMatrixWIM2[[j,i]]=Cos[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl];
weightMatrixWIM2[[j,i+1]]=Sin[(i/2) (j-1) diTarget 2Pi/fl],
{j,m},{i,2,n-1,2}];
```

**ノイズを含まない WIM 解** ノイズを含まない理想的な磁界ベクトルを計算する。

```
fieldCont2=systemMatrix2.modelFieldSourceOriginal;
```

ノイズを含まない磁界から WIM 解を計算し、図 8 に示す。

```
Timing[weightenSolutionCont2=
weightMatrixWIM2.(orderVector=
coefficientVector[systemMatrix2,fieldCont2,
weightMatrixWIM2]);]
{0.05 Second,Null}
ListPlot[weightenSolutionCont2,
PlotJoined -> True,PlotRange->All,
PlotLabel->"Noiseless Solution",
AxesLabel->{"Pos.,"Current [A]"}];
```

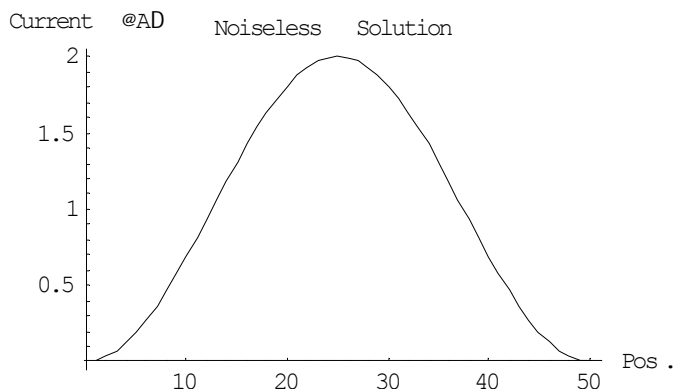


図 8. ノイズを含まない WIM 解

**ノイズ磁界による WIM 解** 測定される磁界ベクトルはノイズを含まない正しい磁界の最大絶対値の 10% を最大振幅とするノイズを含むとする、図 9 に乱数で作成したノイズ磁界を示す。

```
noiseFieldCont2=
    Table[0.1 Abs[Max[fieldCont2]] Random[Real,{-1.,1.},{n}];
ListPlot[noiseFieldCont2,
    PlotJoined -> True, PlotRange -> All,
    PlotLabel -> "Noise field", AxesLabel -> {"Pos.", "Field H[A/m]"}];
```

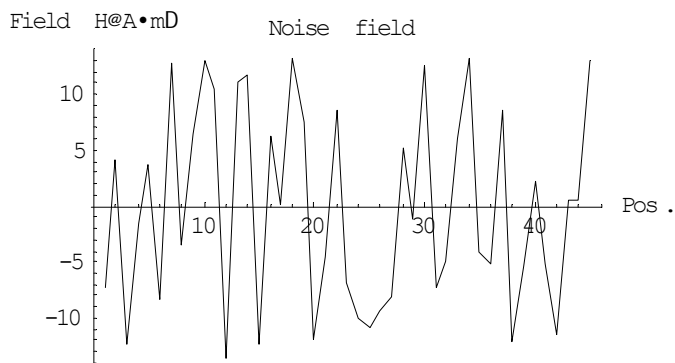


図 9. ノイズ磁界

図 9 のノイズ磁界による WIM 解を計算する。

```
Timing[noiseSolutionCont2=
    weightMatrixWIM2.(orderVector=
        coefficientVector[systemMatrix2,noiseFieldCont2,
            weightMatrixWIM2]);]
{0.06 Second, Null}
```

図 9 のノイズ磁界による WIM 解を図 10 に示す。

```
ListPlot[noiseSolutionCont2,
```

```
PlotJoined->True,PlotRange->All,
PlotLabel->"Noise field",AxesLabel->{"Pos.,"Noise source [A]"}];
```

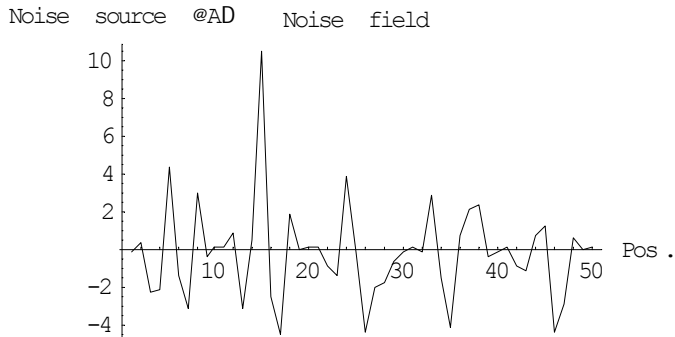


図 10. ノイズ磁界源となる電流

図 10 のノイズ磁界源となる電流の平均値は

```
Apply[Plus,noiseSolutionCont2]/Length[noiseSolutionCont2]
-0.17651
```

であるから、ノイズ磁界源となる電流の平均値はノイズ磁界源となる電流の最大値に対して小さい。要するにノイズ磁界の解へ対する影響は平均的に小さい。

**ノイズを含む WIM 解** 図 9 のノイズを含んだ磁界ベクトルを作成する。

```
noisyFieldCont2=noiseFieldCont2+fieldCont2;
```

ノイズを含んだ磁界から WIM 解を計算する。

```
Timing[noisyWIMSolutionCont2=
weightMatrixWIM2.(orderVector=
coefficientVector[systemMatrix2,noisyFieldCont2,
weightMatrixWIM2]);]
{0.1 Second,Null}
```

図 11 にノイズを含んだ磁界から計算された解ベクトルを示す。

```
solutionContWIMG2=
ListPlot[noisyWIMSolutionCont2,PlotRange->All,
PlotJoined->True,
AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
PlotLabel->"WIM solution"];
```

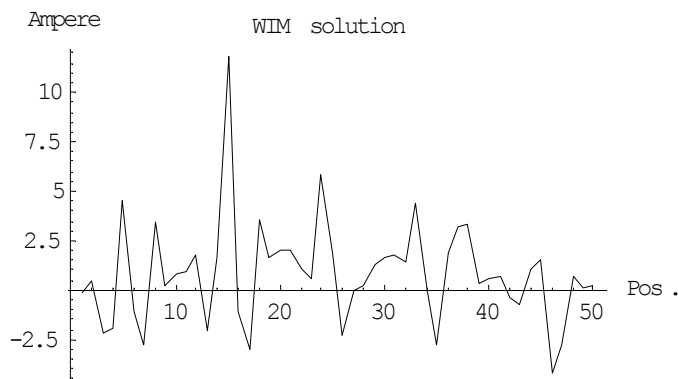


図 11. ノイズを含んだ磁界から計算された WIM 解

図 12 に正解とノイズを含んだ磁界から計算された WIM 解の比較を示す。

```
Show[modelSourceContG,solutionContWIMG2,
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

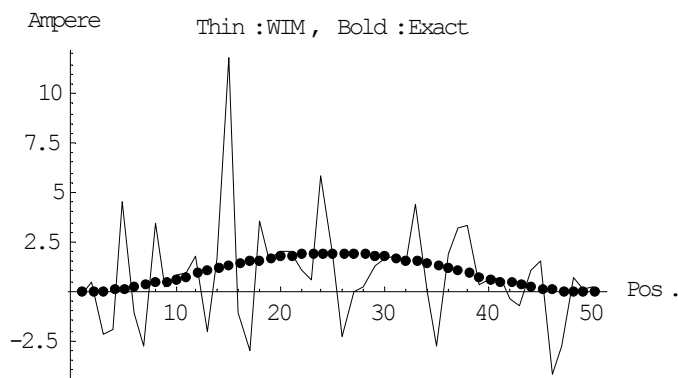


図 12. 正解とノイズを含んだ解の比較

**ノイズの与える WIM 解への影響** 図 11 のノイズを含んだ磁界から計算された解がノイズを含まない磁界から計算された図 8 の解とノイズ磁界から計算された図 10 の解の和に等しいかを調べよう。

```
Max[Abs[Chop[noisyWIMSolutionCont2-
weightenSolutionCont2-noiseSolutionCont2]]]
0
```

完全にノイズと正しい磁界の和による解がノイズを重畳した解になることが確認できた。次に、磁界に含まれるノイズの割合と解に含まれるノイズの割合を比較する。

まず、正しい磁界とノイズ磁界、それぞれの最大絶対値の比は

```
fieldRatio2=Max[Abs[noiseFieldCont2]]/Max[Abs[fieldCont2]]
0.0993845
```

である。

これに対して、正しい磁界とノイズ磁界、それぞれに起因する電流の最大絶対値の比は

```
sourceRatio2=Max[Abs[noiseSolutionCont2]]/Max[Abs[weightenSolutionCont2]]
```

5.23508

である。この両者の比が一致しないのは、一意的に決まる  $n=45$  個の解に従属して  $m-n=5$  個の解が従属して決定されるためである。すなわち、従属する解によってノイズの影響が拡大されている。ノイズの拡大率は

```
sourceRatio2/fieldRatio2
```

52.675

であり、測定点数  $n$  が少ない場合と比較して極めて大きい。測定点数が少ない場合と本質的に異なるのは、測定点数が多いほど高次の変化率を持つ解が仮定される点にある。換言すれば、空間周波数の高いノイズほど大きく解へ影響する。

<d>データの前処理 ノイズを含んだ磁界を図 13 に示す。

```
noisyFieldModelG=ListPlot[noisyFieldCont2,
    PlotRange->All,PlotJoined->True,
    AxesLabel->{"Pos.,"Field H"},
    PlotLabel->"Original noisy field";
```

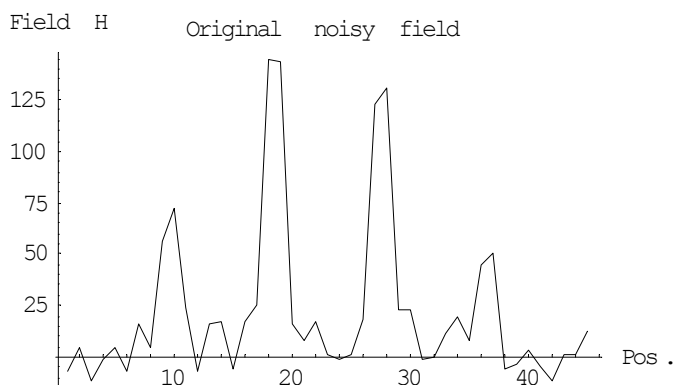


図 13.ノイズを含んだ磁界

磁界データを 2 次関数で近似する。

```
leastSquares=Fit[noisyWIMSsolutionCont2,{1,x,x^2},x]
```

```
-0.608405 + 0.192308 x - 0.00404421 x^2
```

最小 2 乗法で近似された磁界を計算し、図 14 に示す。

```
leastSquaresG=ListPlot[leastData=Table[leastSquares,{x,n}],
    PlotRange->All,Prolog -> AbsolutePointSize[4],
    AxesLabel -> {"Pos.,"Field H"},
    PlotLabel -> "Smoothed by 2nd order LS";
```

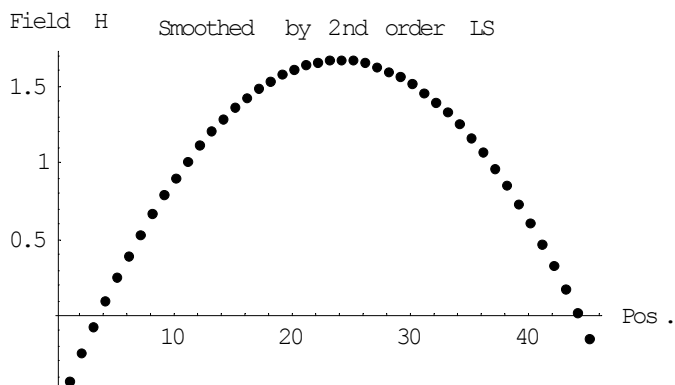


図 14.2 次関数で近似された磁界

最小 2 乗法で近似された磁界と図 13 のノイズを含む磁界との比較を図 15 に示す。可能な限り平滑化された磁界となっていることがわかる。

```
Show[leastSquaresG,noisyFieldModelG,
      PlotLabel->"Bold:LS, Thin:Original"];
```

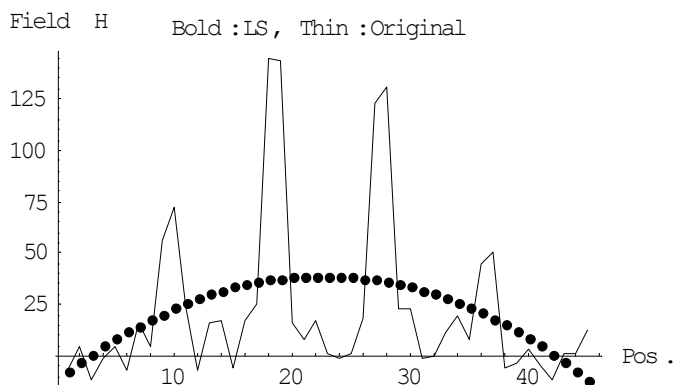


図 15.2 次関数で近似された磁界とノイズを含む磁界との比較

図 14 の平滑化された磁界から電流分布を計算する。

```
Timing[refinedWIMSolutionPre1=
      weightMatrixWIM2.(orderVector=
        coefficientVector[systemMatrix2,leastData,
          weightMatrixWIM2]);]
{0.05 Second,Null}
```

図 16 に平滑化された磁界から計算された電流分布を示す。

```
refinedWIMSolutionPre1G=
      ListPlot[refinedWIMSolutionPre1,
        PlotRange->All,PlotJoined->True,
        AxesLabel->{"Pos.,"Ampere"},
        PlotLabel->"WIM solution"];
```

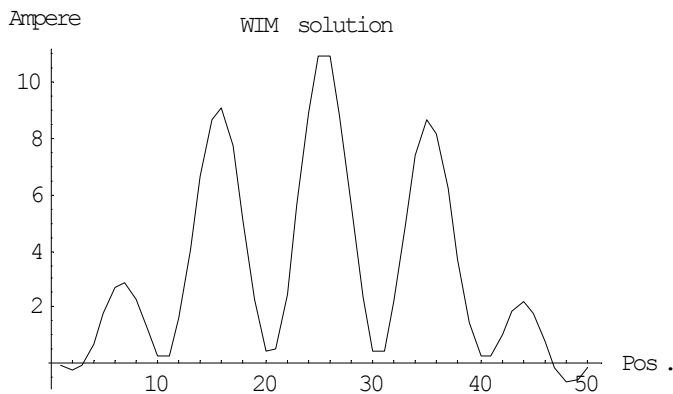


図 16.平滑化された磁界から計算された WIM 解

図 17 に正解と平滑化された磁界から計算された WIM 解の比較を示す。

```
Show[modelSourceContG,refinedWIMSolutionPre1G,  
PlotLabel->"Thin:WIM, Bold:Exact"];
```

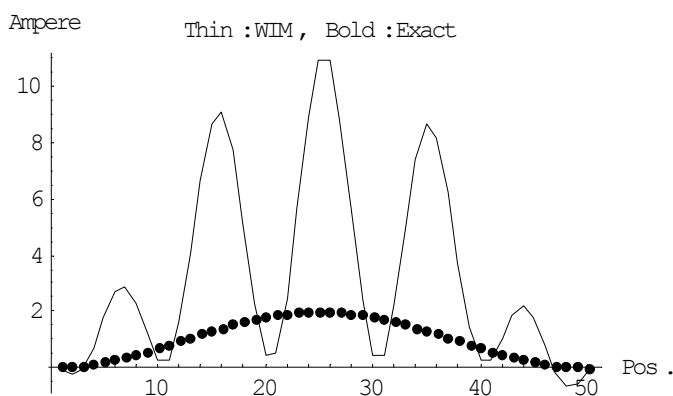


図 17.正解とノイズを含んだ解の比較

図 16 と図 17 から、ノイズを含む磁界を如何に平滑化しても解へ与えるノイズの影響は削減できないことがわかる。すなわち、逆問題において、ノイズを含む既知情報に対する前処理は無力である。

<e>データの後処理 図 18 の WIM 解を 3 次関数で近似する。

```
lsPara=Table[x^i,{i,0,3}];
```

```
lsSolution=Fit[noisyWIMSolutionCont2,lsPara,x]
```

$$-1.03269 + 0.28746 x - 0.00866267 x^2 + 0.000060372 x^3$$

図 18 の WIM 解を 3 次関数で近似する。

```
lsPara=Table[x^i,{i,0,3}];
```

```
lsSolution=Fit[noisyWIMSolutionCont2,lsPara,x]
```

$$-1.03269 + 0.28746 x - 0.00866267 x^2 + 0.000060372 x^3$$

最小 2 乗法で近似された解を計算し、図 19 に示す。

```
leastSquaresG=ListPlot[leastData=Table[lsSolution,{x,n}],
```

```
PlotRange->All,PlotJoined->True,
```

```
AxesLabel -> {"Pos.", "Source [A]"},
```

```
PlotLabel -> "Smoothed by 2nd order LS";
```

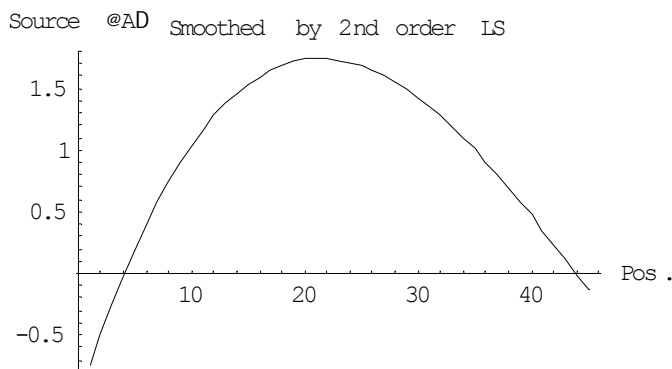


図 19.2 次関数で近似された WIM 解

最小 2 乗法で近似された WIM 解と正解の比較を図 20 に示す。

```
Show[modelSourceContG,leastSquaresG,
```

```
PlotLabel->"Bold:Exact, Thin:smoothed WIM"];
```

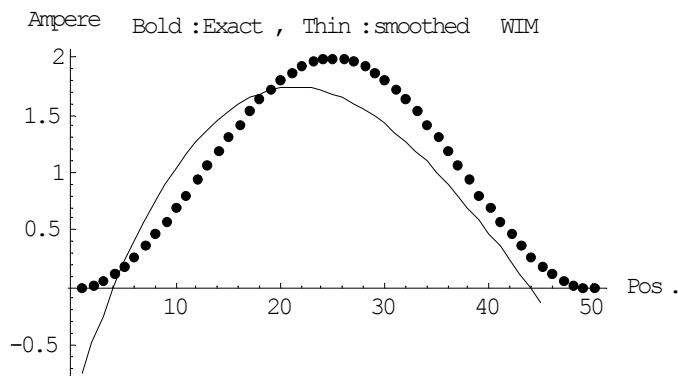


図 20.最小 2 乗法で近似された WIM 解と正解との比較

図 20 から、ノイズを含む磁界から計算される電流を平滑化した後処理法は、どの程度まで平滑化するかの問題が有るが、前処理よりも効果的である。ノイズ磁界源となる電流の平均値は小さい絶対値をとるから、平滑化はなるべく低次の補間で行う方が望ましい。

#### 4.4.4 まとめ

ここでは関数型重み付き逆行列法におけるノイズ処理方法を検討した。関数型重み付き逆行列法はノイズを拡大する解を与える。関数型重み付き逆行列法が与えるノイズフィールド源の平均値は絶対値が小さく、ノイズは解の平均値に対する影響が少ない。

ノイズを削減する方法として、予めノイズを含む既知情報を平滑化する前処理が考えられる。しかし、前処理で削減出来ないノイズが解へ拡大されて反映するため、その効果は



少ない。他方、ノイズを含む既知情報から得られる解を平滑化する後処理法は効果的にノイズの影響を削減できる。前処理と後処理、何れの方法でもどの程度データを平滑化するか  
の基準が存在せず、この意味で厳密に式を満足する解を得ようとする重み付き逆行列法  
を実用的な問題へ適用するには、ノイズ処理方法の課題が解決されるのを待たねばなら  
ない。唯一の指針は、可能な限り平均的な解を得るため、平滑化が低次の関数でなされ  
ることである。

## 4.5 関数型重み付き逆行列法による 2 次元放射線源探索

### 4.5.1 概要

重み付き逆行列法は、解がフーリエ級数展開可能と仮定する三角関数から導かれる重み行列を用いた場合、良好な解が期待できる。関数型重み付き逆行列法は、測定点数に等しい数の一意的に決まる解を関数で内挿して逆問題の解とする方法である。内挿する関数を三角関数とした場合、解がフーリエ級数に展開可能とする拘束条件を意味し、重み付き逆行列から得られる係数ベクトルはフーリエ級数のスペクトラムの大きさを与えることに他ならない。

ここでは、解をフーリエ展開可能と仮定した三角関数から導かれる重み行列を用いた関数型重み付き逆行列法を 2 次元の放射線源探索問題へ応用した例題を取り上げる。ここでの基本的な目的は重み付き逆行列法の 2 次元問題への適用法を放射線源探索問題を通して説明することである。

### 4.5.2 2 次元関数型重み付き逆行列法

**<a>目的** 逆問題の多くは、局所的な情報に対応する式の数  $n$  よりも多い情報源に対応する未知数の数  $m$  を持つ線形システムを解くことに帰する。これは、一意的に決まる解ベクトルの要素数は式の数  $n$  に等しく、未知数の数から式の数を引き算した数  $(m-n)$  の解要素は式の数  $n$  に等しい数の解要素に従属して決まる。関数型重み付き逆行列法(Functional Weighted Inverse Matrix Method、FWIM と略記)は、未知数の数から式の数を引き算した数  $(m-n)$  の解要素を単純に式の数  $n$  に等しい解要素に従属して決めるのではなく、何らかの関数で補間して与えようとする考え方に基づいている。例えば、式の数が  $n=1$  個、未知数の数が  $m=2$  個の場合、一意的に決まる解は  $n=1$  個であり、残りの解は従属して決まる。このとき、単純な従属でなく、一意的に決まる 1 個の解と従属して決まる残りの 1 個の解の間を何らかの関数で補間して与えようとする考え方が関数型重み付き逆行列法の骨子である。

本稿では、

- 1) 関数型重み付き逆行列法の 2 次元問題へ適用法、
  - 2) 2 次元放射線源探索問題の例題、
- について述べる。

**<b>三角関数を使った重み付き逆行列法** 式の数  $n$ 、式の数より多い未知数  $m$  を持つ不適切な線形システムは、 $C$  を  $n$  行  $m$  列の係数行列として、(1)式で与えられる。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (1)$$

(1)式の解は  $W$  を  $m$  行  $n$  列の重み行列として、解ベクトル  $\mathbf{X}$  が次式で与えられると仮定する。

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{S} \quad (2)$$

$\mathbf{S}$  は  $n$  次の列ベクトルである。

解ベクトル  $\mathbf{X}$  が(2)式で与えられ、行列  $\mathbf{C}\mathbf{W}$  が非特異行列である場合、重み付き逆行列法

は次式の解を与える。

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}[\mathbf{C}\mathbf{W}]^{-1} \mathbf{Y} \quad (3)$$

(3)式で最大の問題点は重み行列  $\mathbf{W}$  の決め方である。解  $\mathbf{s}$  が解空間  $\alpha$  の関数  $\mathbf{s}(\alpha)$  であり、

$$\mathbf{s}(\alpha) = s_0 + \alpha s_1 + \alpha^2 s_2 + \dots + \alpha^{n-1} s_{n-1} \quad (4)$$

とした。

ここでは、解  $\mathbf{s}$  が解空間  $\alpha$  の関数であり、以下の形で与えられるとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\alpha) = & s_0 + s_1 \cos[\alpha] + s_2 \sin[\alpha] + s_3 \cos[2\alpha] \\ & + s_4 \sin[2\alpha] + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式は解が三角関数の和で与えられると仮定することを意味し、複素数を使っても書ける。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\alpha) = & s_0 \operatorname{Re}[e^{i0\alpha}] + s_1 \operatorname{Re}[e^{i\alpha}] + s_2 \operatorname{Im}[e^{i\alpha}] + s_3 \operatorname{Re}[e^{i2\alpha}] \\ & + s_4 \operatorname{Im}[e^{i2\alpha}] + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

(5)式で、解の存在する空間が  $\square\square$  毎に離散化されたとすれば、解ベクトル  $\mathbf{X}$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \cos[\Delta\alpha] & \sin[\Delta\alpha] & \cos[2\Delta\alpha] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos[(n-1)\Delta\alpha] & \sin[(n-1)\Delta\alpha] & \cos[2(n-1)\Delta\alpha] & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{W}\mathbf{S} \end{aligned} \quad (8)$$

となり、(8)式から 1 次元問題へ対する重み関数  $\mathbf{W}$  が決定される。

2 次元問題では、解  $\mathbf{s}$  が解空間  $\alpha$  と  $\beta$  の関数であり、以下の形で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\alpha, \beta) = & s_0 + s_1 \cos[\alpha] + s_2 \sin[\alpha] + s_3 \cos[\beta] + s_4 \sin[\beta] \\ & + s_5 \cos[\alpha] \cos[\beta] + s_6 \cos[\alpha] \sin[\beta] \\ & + s_7 \sin[\alpha] \cos[\beta] + s_8 \sin[\alpha] \sin[\beta] + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式から、係数の個数は 9 個以上の奇数でなければならないことが判る。

#### 4.5.3 2次元放射線源探査問題

**<a>計算の準備** メモリーの少ない機械を使う場合は下記のメモリの節約コマンドを入れる。続いて、線形代数さらにグラフィックスのパッケージを入れる。尚、これらの命令は複数回入れるとエラーになるから注意すべきこと。

**<<Utilities`MemoryConserve`**

```
SMemoryIncrement=100000;
```

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
```

```
Off[General::spell1,MemoryConserve::start,MemoryConserve::end];
```

**<b>1次元データを2次元データに変換する関数** FWIM法は線形システムを解く形式で逆問題の解を与える。従って、解は1次元ベクトルで与えられるから、これを2次元平面データに変換する必要がある。このため、一次元データを mx 行 my 列の2次元データに変換するルーチンを定義する。

```
convert2D[1Ddata_,mx_,my_] :=
```

```
Table[1Ddata[[i+(j-1) mx]],{j,my},{i,mx}];
```

**<c>重み付き逆行列法の係数ベクトルを計算する関数**

```
coefficientVector =
```

```
Compile[{{systemMatrix,_Real,2},{inPut,_Real,1},
```

```
{weightMatrix,_Real,2}},
```

```
Inverse[systemMatrix.weightMatrix].inPut];
```

**<d>シミュレーションモデル** 放射線源が分布する面の縦と横をそれぞれ targetLengthY,targetLengthX とする。また、それぞれの分割個数を my と mx とする。放射線源が分布する面に平行に位置する放射線強度測定面の縦と横をそれぞれ sensingLengthY、sensingLengthX とし、測定点数は横方向を nx、縦方向を ny とする。さらに、放射線源が分布する平面と放射線強度測定面間の距離を zOff とする。

離散化は図 1 に示すように行う。離散化された放射線源は各平行四辺形の中心に位置し、その大きさは放射線源密度と平行四辺形の面積の積で与えられる。放射線強度が測定される点は測定面の微小平行四辺形の中心に位置する。

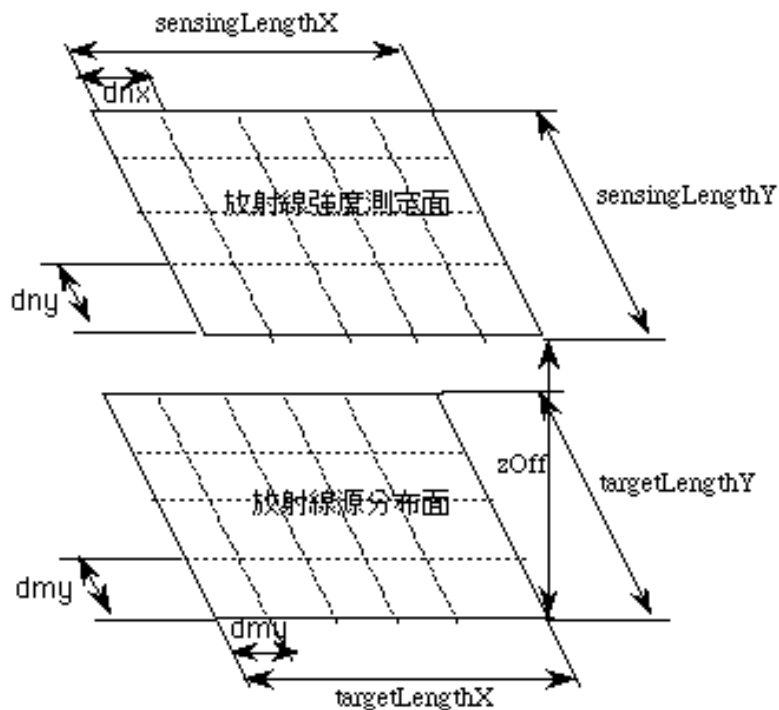


図 1 2 次元放射線源分布探索問題のモデル

<e>グリーン関数 放射線強度は放射線源からの距離の 2 乗に反比例して減衰する。ここではこの関数を greenFunc で定義する。

greenFunc=

```
Compile[{i,j,nx,mx,
  sensingLengthX,sensingLengthY,
  targetLengthX,targetLengthY,zOff,
  dnx,dnx2,dny,dny2,dmx,dmx2,dmy,dmy2},
(
  paraX=dmx2+(i-1) dmx-
    Floor[(i-1)/mx] targetLengthX-
    dnx2-(j-1) dnx+
    Floor[(j-1)/nx] sensingLengthX;
  paraY=dmy2+Floor[(i-1)/mx] dmy-
    dny2-Floor[(j-1)/nx] dny;

  1.0/(4Pi (paraX^2+paraY^2+zOff^2))
)
];
```

<f>x,y 座標を決める関数

```

xPosition=
    Compile[{i,mx,targetLengthX,dmx,dmx2,dmy,dmy2},
        paraX=dmx2+(i-1) dmx-Floor[(i-1)/mx] targetLengthX];
yPosition=
    Compile[{i,mx,targetLengthX,dmx,dmx2,dmy,dmy2},
        paraY=dmy2+Floor[(i-1)/mx] dmy];

```

<g>モデル放射線源分布を与える関数 モデル放射線源分布を与える関数を以下のように定義する。

```

radioActiveF=Compile[{x,y,mx,my},
    para=Sqrt[(x-(mx/2))^2+(y-(my/2))^2];
    1.+Cos[0.5 para]];

```

<h>簡単な例題 放射線源が分布する面の縦と横をそれぞれ targetLengthY,targetLengthX とする。また、それぞれの分割個数を my と mx とする。放射線源が分布する面に平行に位置する放射線強度測定面の縦と横をそれぞれ sensingLengthY、sensingLengthX とし、測定点数は横方向を nx、縦方向を ny とする。さらに、放射線源が分布する平面と放射線強度測定面間の距離を zOff とする。

```

sensingLengthX=1.0;      sensingLengthY=1.0;
targetLengthX=1.0;      targetLengthY=1.0;

nx=3;   dnx=sensingLengthX/nx;   dnx2=0.5 dnx;
ny=3;   dny=sensingLengthY/ny;   dny2=0.5 dny;

n=nx ny;

```

フィールド源算定は対象領域を 20 x 20 に分割して計算することとする。

```

mx=20;   dmx=targetLengthX/mx;
my=20;   dmy=targetLengthY/my;

m=mx my;
zoff=0.05;

```

図 2 に求めるべきモデル放射線源分布を示す。

```

sourceDistribution=Table[radioActiveF[x,y,mx,my],{y,my},{x,mx}];
modelDistribution=ListPlot3D[sourceDistribution,
    PlotRange->All,Mesh->False,
    PlotLabel->"Exact field source density distribution"];

```

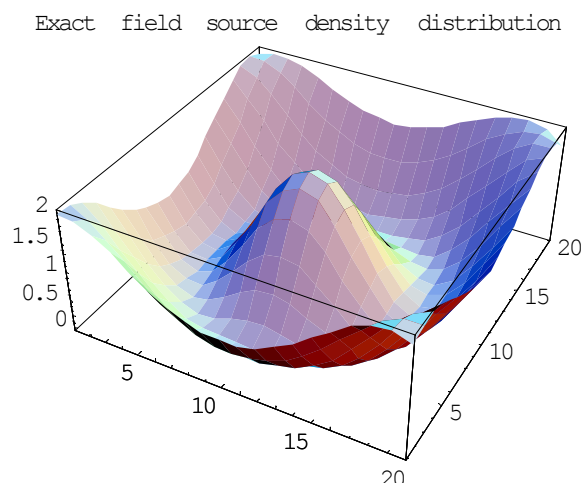


図2 モデル放射線源分布

システム行列を計算しておく。

```
systemMatrix=
```

```
Table[greenFunc[i,j,nx,mx,
    sensingLengthX,sensingLengthY,targetLengthX,
    targetLengthY,zoff,dnx,dnx2,dny,dny2,dmx,
    dmx/2,dmy,dmy/2],{j,n},{i,m}];
```

図2のモデル放射線源が測定面へ与える放射線強度計算を行う。図3が測定面で得られる放射線強度分布である。

```
vectorMeasured=systemMatrix.Flatten[sourceDistribution];
```

```
ListPlot3D[convert2D[vectorMeasured,nx,ny],
```

```
PlotRange->All,Mesh->False,
```

```
PlotLabel->"Measured field distribution"];
```

Measured field distribution

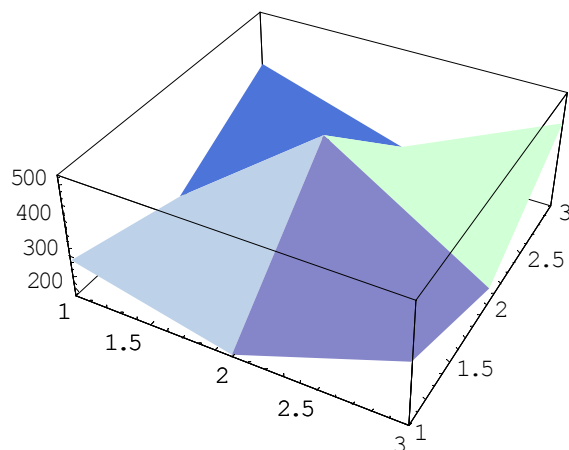


図3 測定された放射線強度分布

(9)式に従って重み行列を作る。まず、最初に x、y 方向の空間角速度を定義しておこう。

```
omegaX=2.Pi/targetLengthX;
```

```
omegaY=2.Pi/targetLengthY;
```

次に、重み行列の配列を作成する。

```
weightMatrix=Table[1.0,{j,m},{i,n}];
```

x、y 方向の座標位置を計算しておく。

```
weightX=Table[xPosition[j,mx,targetLengthX,  
dmx,dmx/2,dmy,dmy/2},{j,m}];
```

```
weightY=Table[yPosition[j,mx,targetLengthX,  
dmx,dmx/2,dmy,dmy/2},{j,m}];
```

重み関数の具体的計算を行う。

```
Do[
```

```
weightMatrix[[j,2]]=Cos[omegaX weightX[[j]]];
```

```
weightMatrix[[j,3]]=Sin[omegaX weightX[[j]]];
```

```
weightMatrix[[j,4]]=Cos[omegaY weightY[[j]]];
```

```
weightMatrix[[j,5]]=Sin[omegaY weightY[[j]]];
```

```
weightMatrix[[j,6]]=weightMatrix[[j,2]]*weightMatrix[[j,4]];
```

```
weightMatrix[[j,7]]=weightMatrix[[j,2]]*weightMatrix[[j,5]];
```

```
weightMatrix[[j,8]]=weightMatrix[[j,3]]*weightMatrix[[j,4]];
```

```
weightMatrix[[j,9]]=weightMatrix[[j,3]]*weightMatrix[[j,5],  
{j,m}];
```

出来上がった重み関数を図 4 に示す。

```
ListDensityPlot[weightMatrix,Mesh->False];
```

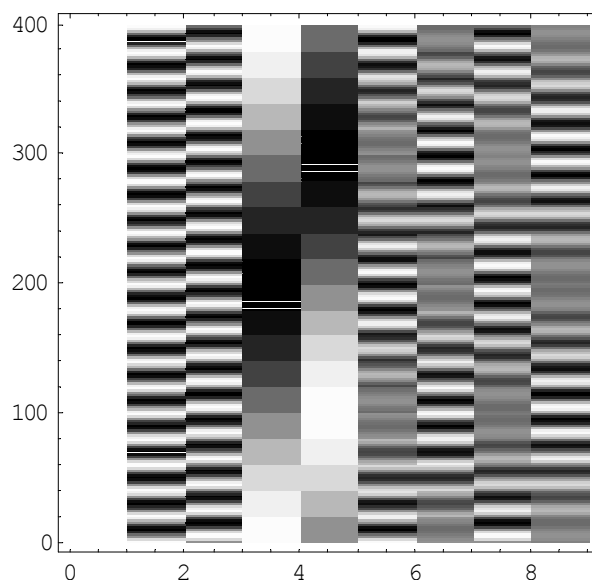


図 4 三角関数から生々された重み関数  
FWIM 解を計算する。



```
Timing[weightedSolution=
  weightMatrix.(orderVector=
    coefficientVector[systemMatrix,vectorMeasured,weightMatrix]);]
{0.16 Second,Null}
```

方程式を満足する解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[vectorMeasured-systemMatrix.weightedSolution]]
0
```

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。図 5 に計算で得られた放射線源分布を示す。

```
solutionG=ListPlot3D[convert2D[weightedSolution,mx,my],
  PlotRange->All,Mesh->False,
  PlotLabel->"Computed source distribution"];
Computed source distribution
```

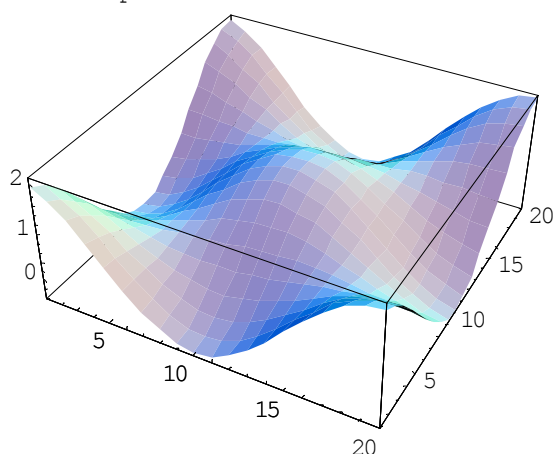


図 5.FWIM 解

図 6 に正解と WIM 解の比較を示す。図 5 の FWIM 法は正しい結果を与えていることがわかる。

```
Show[GraphicsArray[{modelDistribution,solutionG}]];
```

field source density distribution Computed source distribution

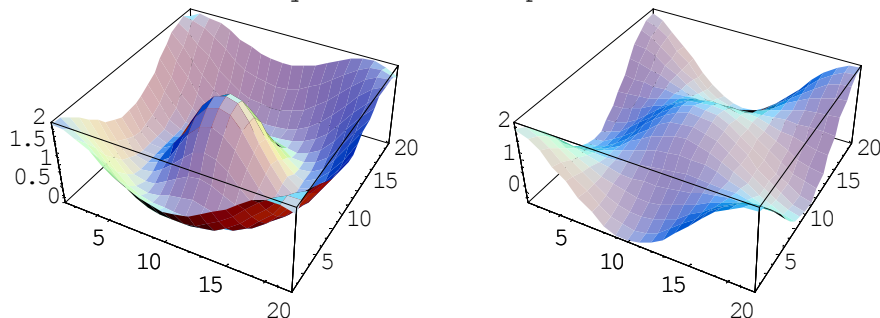


図 6.正解と F WIM 解の比較

係数を調べてみよう。

```
orderVector
```

```
{0.739728,0.119004,-0.125503,0.119004,-0.125503,1.07538,-0.0800058,-0.0800058,-0.00720534}
```

FWIM 解と正解間の誤差分布を図 7 に示す。

```
ListPlot3D[sourceDistribution-convert2D[weightedSolution,mx,my],
```

```
PlotRange->All,Mesh->False,
```

```
PlotLabel->"Error distribution"];
```

Error distribution

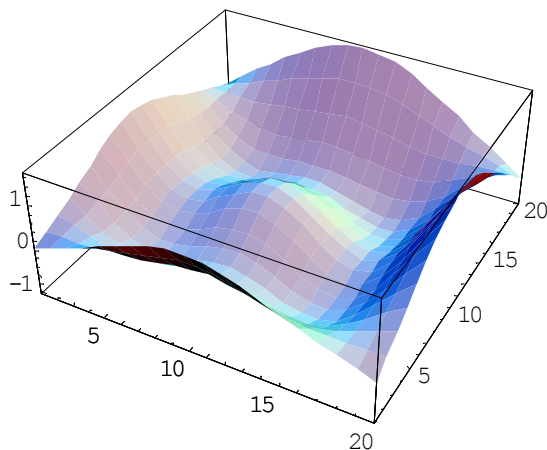


図 7.正解と FWIM 解間の誤差分布

図 7 から、FWIM 解は定性的に正しい解であるが、定量的な精度が低いことが判る。

<i>測定点数 n の増加 測定点数を増加して解の精度が向上することを確認する。

```
nx=9; dnx=sensingLengthX/nx; dnx2=0.5 dnx;
```

```
ny=nx; dny=sensingLengthY/ny; dny2=0.5 dny;
```

```
n=nx ny;
```

システム行列を計算しておく。

```
systemMatrix=
```

```
Table[greenFunc[i,j,nx,mx,
```

```
sensingLengthX,sensingLengthY,targetLengthX,
```

```
targetLengthY,zoff,dnx,dnx2,dny,dny2,dmx,
```

```
dmx/2,dmy,dmy/2},{j,n},{i,m}]];
```

図 2 のモデル放射線源が測定面へ与える放射線強度計算を行う。図 8 が測定面で得られる放射線強度分布である。

```
vectorMeasured=systemMatrix.Flatten[sourceDistribution];
```

```
ListPlot3D[convert2D[vectorMeasured,nx,ny],
```

```
PlotRange->All,Mesh->False,
```

```
PlotLabel->"Measured field distribution"];
```

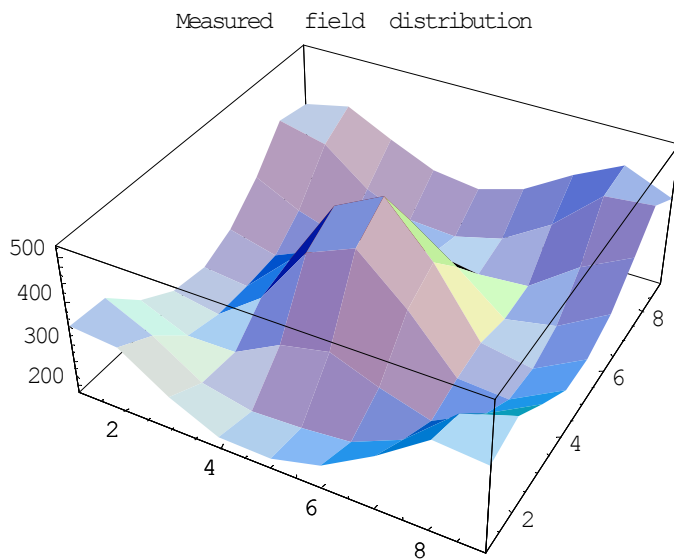


図 8 測定された放射線強度分布

(9)式に従って重み行列を作る。まず、単位ベクトルと x、y 座標の位置が入った配列を作る。

```
unitMatrix=Table[1.0,{j,m}];
weightX=
    Table[xPosition[j,mx,targetLengthX,dmx,dmx/2,dmy,dmy/2],{j,m}];
weightY=
    Table[yPosition[j,mx,targetLengthX,dmx,dmx/2,dmy,dmy/2],{j,m}];
```

x 方向の重み関数を作る。

```
weightMatrix1=Table[0,{nx-1},{m}];
Do[
    weightMatrix1[[i-1,j]]=Cos[(i/2) omegaX weightX[[j]]];
    weightMatrix1[[i,j]]=Sin[(i/2) omegaX weightX[[j]]],
    {i,2,nx-1,2},{j,m}];
```

y 方向の重み関数を作る。

```
weightMatrix2=Table[0,{nx-1},{m}];
Do[
    weightMatrix2[[i-1,j]]=Cos[(i/2) omegaY weightY[[j]]];
    weightMatrix2[[i,j]]=Sin[(i/2) omegaY weightY[[j]]],
    {i,2,nx-1,2},{j,m}];
```

x、y 方向の積から成る重み関数を作る。

```
weightMatrix3=
    Flatten[Outer[Times,weightMatrix1,weightMatrix2,1,1];
```

全体の重み関数を作成し、確認のため配列の大きさを出力する。

```
weightMatrix=
  Transpose[
    Join[{unitMatrix},weightMatrix1,
      weightMatrix2,weightMatrix3]];
  Dimensions[weightMatrix]
{400,81}
```

重み関数を図 9 に示す。

```
ListDensityPlot[weightMatrix,Mesh->False];
```

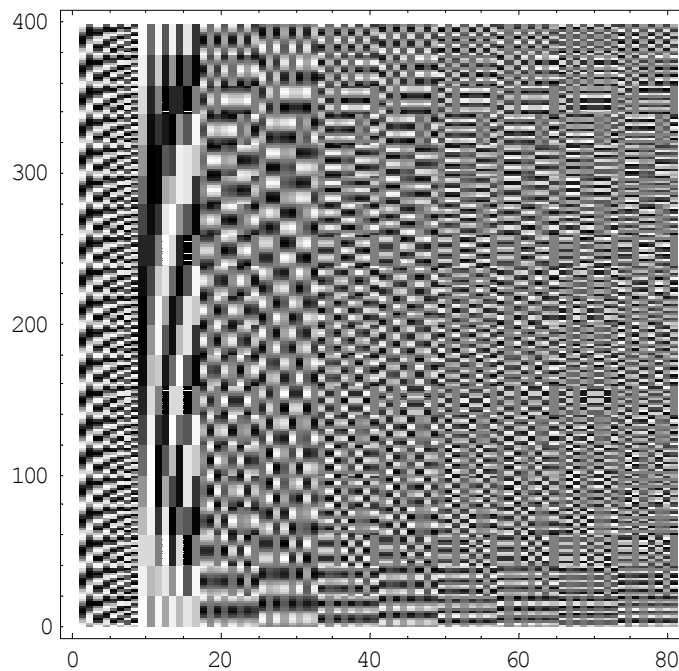


図 9 三角関数から生々された重み関数

FWIM 解を計算する。

```
Timing[weightedSolution=
  weightMatrix.(orderVector=
    coefficientVector[systemMatrix,vectorMeasured,weightMatrix]);]
{1.65 Second,Null}
```

方程式を満足する解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[vectorMeasured-systemMatrix.weightedSolution]]
0
```

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。図 10 に FWIM 法によって求められた放射線源分布を示す。

```
solutionG=ListPlot3D[convert2D[weightedSolution,mx,my],
```

```
PlotRange->All,
Mesh->False,
PlotLabel->"Computed source distribution";
```

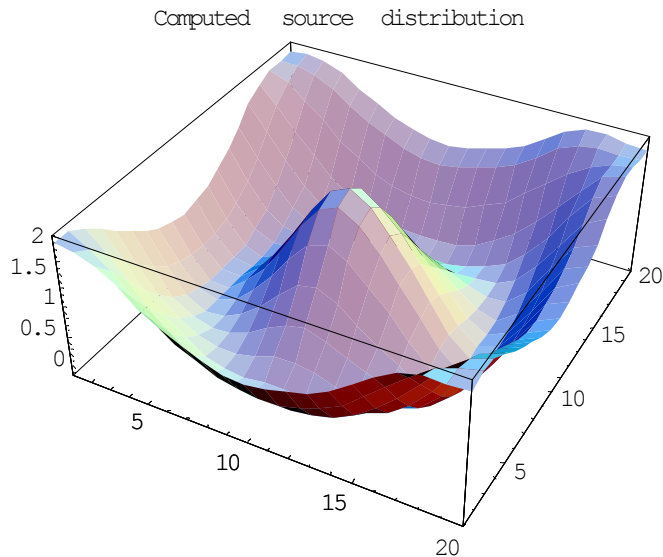


図 10.FWIM 解

```
Show[GraphicsArray[{modelDistribution,solutionG}]];
```

field source density distribution Computed source distribution

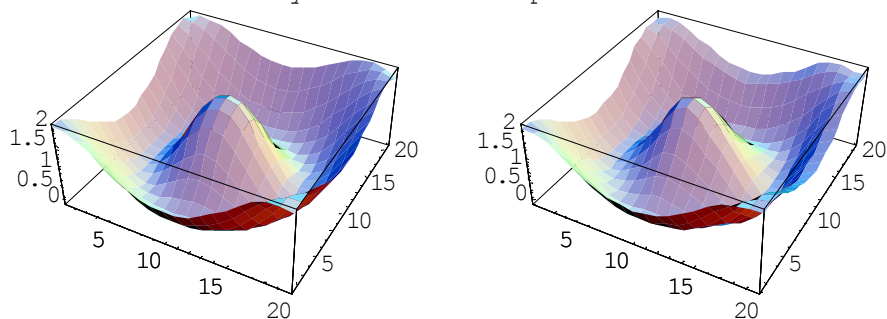


図 11.正解と F WIM 解の比較

図 11 に正解と F WIM 解の比較を示す。図 10 の F WIM 法はかなり良好な結果を与えていることが判る。

係数を調べてみよう。

```
orderVector
```

```
{0.806242,0.306797,-0.050367,0.348058,-0.11736,0.0631314,-0.0414908,0.0185571,-0.038153,0.306797,
,-0.050367,0.348058,-0.11736,0.0631314,-0.0414908,0.0185571,-0.038153,0.640636,-0.0989769,-0.3273
79,0.112582,-0.0820763,0.0553495,-0.02524,0.0534803,-0.0989769,0.0152662,0.0524401,-0.0180346,0.
0131713,-0.00888059,0.00406773,-0.00861121,-0.327379,0.0524401,-0.0561821,0.0197415,-0.0163466,
0.0114213,-0.00511058,0.011349,0.112582,-0.0180346,0.0197415,-0.00689095,0.00575267,-0.00397288
,-0.00184679,-0.00401695,-0.0820763,0.0131713,-0.0163466,0.00575267,-0.00423574,0.00301018,-0.00
```

```
125522,0.00287984,0.0553495,-0.00888059,0.0114213,-0.00397288,0.00301018,-0.00207088,0.0009433
41,-0.00205032,-0.02524,0.00406773,-0.00511058,0.00184679,-0.00125522,0.000943341,-0.000346325,
0.000873979,0.0534803,-0.00861121,0.011349,-0.00401695,0.00287984,-0.00205032,0.000873979,-0.00
20022}
```

FWIM 解と正解間の誤差分布を図 12 に示す。

```
ListPlot3D[sourceDistribution-convert2D[weightedSolution,mx,my],
PlotRange->All,Mesh->False,
PlotLabel->"Error distribution"];
```

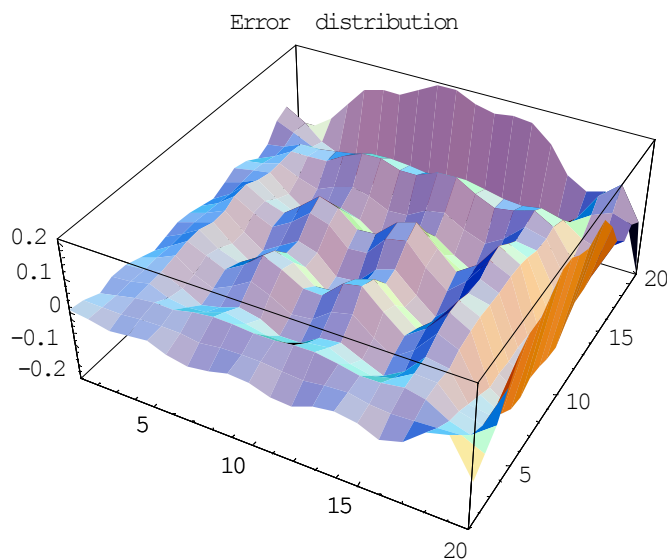


図 12.正解と FWIM 解間の誤差分布

図 12 から測定点数の増加が精度の向上に繋がっていることが確認できた。

**<j>関数型重み付き逆行列法の汎用ソルバーの作成** <i>で行った計算手順を使って 2 次元問題に対する関数型重み付き逆行列法の汎用コードを作成しておこう。解がフーリエ級数へ展開可能と仮定した関数型重み付き逆行列法による汎用ソルバーを以下に示す。入力、係数行列 systemMatrix、測定されたフィールドベクトル measuredVector、x 方向の分割数 mx、さらに y 方向の分割数 my であり、出力は解ベクトル weightedSolution、フーリエ級数の係数ベクトル orderVector、そして計算に使った重み行列 weightMatrix である。このパッケージは x,y 方向の位置を決める関数 xPosition と yPosition、そして係数ベクトルを計算する関数 coefficientVector を含んでいる。この汎用ソルバーでは、解の存在する長方形領域の x,y 方向の長さを単位値に正規化してあることに注意しなければならない。

```
fWIM2D[sourceMatrix_, measuredVector_,mx_,my_,nx_,ny_] :=
Module[{unitMatrix, weightMatrix1, weightMatrix2,weightMatrix3,
systemMat,weightMat,inPut,i,j,m=mx my,mz,
dmx=1./mx,dmx2=0.5 dmx,omegaX=2.Pi,xPosition,xCoord,
dmy=1./my,dmy2=0.5 dmy,omegaY=2.Pi,yPosition,yCoord},
```

```

xPosition=Compile[{i,mz,dmx,dmx2},dmx2+(i-1) dmz-Floor[(i-1)/mz]];
yPosition=Compile[{i,mz,dmy,dmy2},dmy2+Floor[(i-1)/mz] dmy];
unitMatrix = Table[1., {j, m}];
weightMatrix1 = Table[0., {nx - 1}, {m}];
Do[
  xCoord=xPosition[j,mx,dmx,dmx2];
  weightMatrix1[[i-1,j]] = Cos[(i/2.)*omegaX*xCoord];
  weightMatrix1[[i,j]] = Sin[(i/2.)*omegaX*xCoord],
  {i, 2,nx - 1,2}, {j, m}];
weightMatrix2 = Table[0., {ny - 1}, {m}];
Do[
  yCoord=yPosition[j,mx,dmy,dmy2];
  weightMatrix2[[i-1,j]] = Cos[(i/2.)*omegaY*yCoord];
  weightMatrix2[[i,j]] = Sin[(i/2.)*omegaY*yCoord],
  {i,2,ny - 1,2}, {j, m}];
weightMatrix3=Flatten[Outer[Times,weightMatrix1,weightMatrix2,1],1];
weightMatrix=Transpose[Join[{unitMatrix}, weightMatrix1,
  weightMatrix2,weightMatrix3]];
coefficientVector=Compile[{{systemMat,_Real,2},{inPut,_Real,1},
  {weightMat,_Real,2}},Inverse[systemMat.weightMat].inPut];
weightedSolution=weightMatrix.(orderVector=
  coefficientVector[systemMatrix,measuredVector, weightMatrix]);
{weightedSolution, orderVector, weightMatrix}];

```

この関数を使って 7.3.9 の問題を解いてみよう。

```

Timing[solutionVector=fWIM2D[systemMatrix,vectorMeasured,mx,my,nx,ny];]
{4.28 Second,Null}

```

出力から、計算に使われた重み関数を取り出し図 13 に示す。図 9 と同じ重み関数が計算に使われていることが判る。

```

ListDensityPlot[solutionVector[[3]],Mesh->False];

```

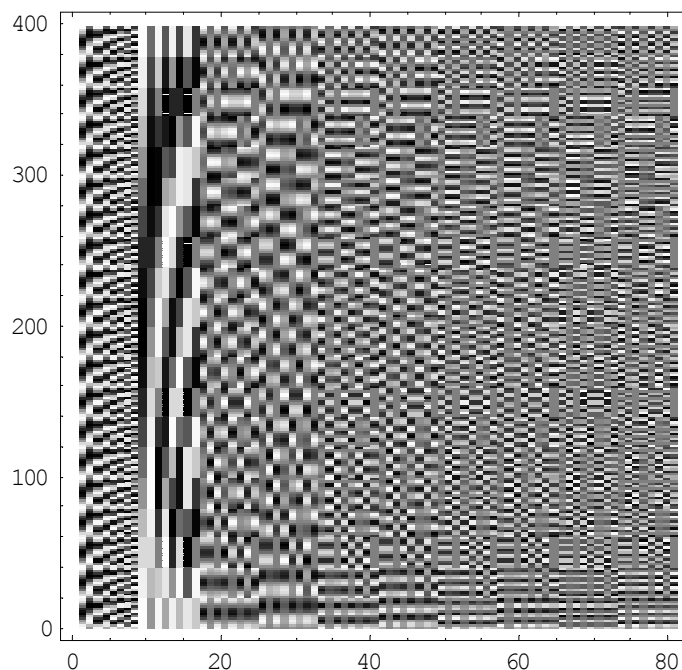


図 13 計算に使われた重み関数

出力から、三角関数の係数を取り出し図 14 に示す。高次の係数の振幅が小さくなり、得られた解が収束していることが判る。

```
ListPlot[solutionVector[[2]],PlotRange->All,PlotJoined->True];
```

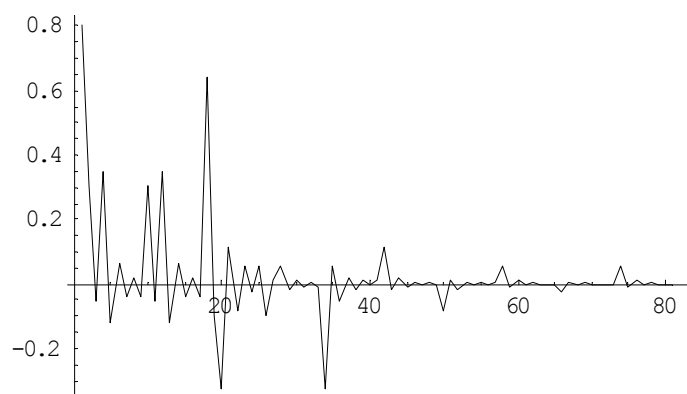


図 14 三角関数の係数

係数の値を以下に示す。これらの値は 4.3.9 で得られた値と一致することが判る。

```
solutionVector[[2]]
{0.806242,0.306797,-0.050367,0.348058,-0.11736,0.0631314,-0.0414908,0.0185571,-0.038153,0.306797
,-0.050367,0.348058,-0.11736,0.0631314,-0.0414908,0.0185571,-0.038153,0.640636,-0.0989769,-0.3273
79,0.112582,-0.0820763,0.0553495,-0.02524,0.0534803,-0.0989769,0.0152662,0.0524401,-0.0180346,0.
0131713,-0.00888059,0.00406773,-0.00861121,-0.327379,0.0524401,-0.0561821,0.0197415,-0.0163466,
0.0114213,-0.00511058,0.011349,0.112582,-0.0180346,0.0197415,-0.00689095,0.00575267,-0.00397288
```



```
,0.00184679,-0.00401695,-0.0820763,0.0131713,-0.0163466,0.00575267,-0.00423574,0.00301018,-0.00125522,0.00287984,0.0553495,-0.00888059,0.0114213,-0.00397288,0.00301018,-0.00207088,0.000943341,-0.00205032,-0.02524,0.00406773,-0.00511058,0.00184679,-0.00125522,0.000943341,-0.000346325,0.000873979,0.0534803,-0.00861121,0.011349,-0.00401695,0.00287984,-0.00205032,0.000873979,-0.0020022}
```

汎用ソルバーから得られた解を図 15 に示す。

```
solutionGx=ListPlot3D[convert2D[solutionVector[[1]],mx,my],
  PlotRange->All,
  Mesh->False,
  PlotLabel->"Computed source distribution"];
```

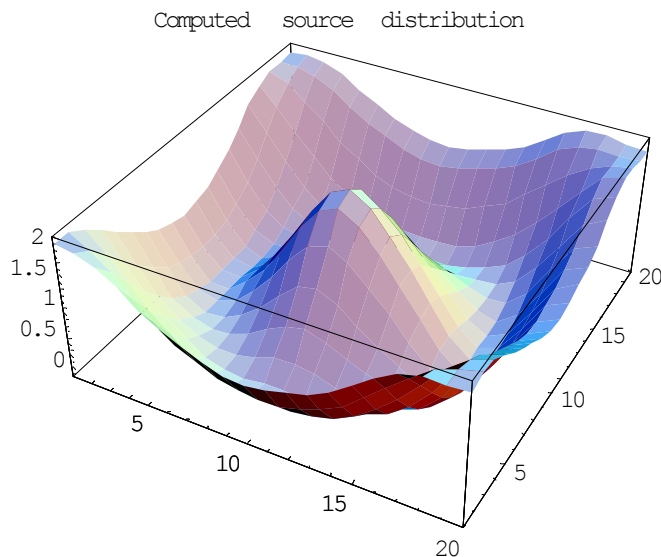


図 15 汎用ソルバーから得られた FWIM 解

<i>で得られた解と汎用ソルバーから得られた解が一致するかどうか調べてみよう。

```
weightedSolution==solutionVector[[1]]
```

```
True
```

両者は完全に一致することが確認できた。

#### 4.5.4 まとめ

本章では、重み付き逆行列法の 2 次元問題適用法について吟味した。その結果、FWIM 法は 2 次元問題に対しても良好な結果を与えることが確認できた。さらに、2 次元問題に対する関数型汎用ソルバーを作成した。

## 4.6 関数型重み付き逆行列法による 2 次元磁界源探索

### 4.6.1 概要

重み付き逆行列法は、解がフーリエ級数展開可能と仮定する三角関数から導かれる重み行列を用いた場合、良好な解が期待できる。関数型重み付き逆行列法は、測定点数に等しい数の一意的に決まる解を関数で内挿して逆問題の解とする方法である。内挿する関数を三角関数とした場合、解がフーリエ級数に展開可能とする拘束条件を意味し、重み付き逆行列から得られる係数ベクトルはフーリエ級数のスペクトラムの大きさを与えることに他ならない。

本稿では、解をフーリエ展開可能と仮定した三角関数から導かれる重み行列を用いた関数型重み付き逆行列法を 2 次元の磁界源探索問題へ応用した例題を取り上げる。

### 4.6.2 2 次元関数型重み付き逆行列法の概要

<a>三角関数を使った重み付き逆行列法 式の数が  $n$ 、式の数より多い未知数  $m$  を持つ不適切な線形システムは、 $C$  を  $n$  行  $m$  列の係数行列として、(1)式で与えられる。

$$Y = CX \quad (1)$$

(1)式の解は  $W$  を  $m$  行  $n$  列の重み行列として、解ベクトル  $X$  が次式で与えられると仮定する。

$$X = WS \quad (2)$$

$S$  は  $n$  次の列ベクトルである。

解ベクトル  $X$  が(2)式で与えられ、行列  $CW$  が非特異行列である場合、重み付き逆行列法は次式の解を与える。

$$X = W[CW]^{-1} Y \quad (3)$$

2 次元問題では、解  $s$  が解空間  $\alpha$  と  $\beta$  の関数であり、以下の形で与えられる。

$$\begin{aligned} s(\alpha, \beta) = & s_0 + s_1 \cos[\alpha] + s_2 \sin[\alpha] + s_3 \cos[\beta] + s_4 \sin[\beta] \\ & + s_5 \cos[\alpha] \cos[\beta] + s_6 \cos[\alpha] \sin[\beta] \\ & + s_7 \sin[\alpha] \cos[\beta] + s_8 \sin[\alpha] \sin[\beta] + \dots \end{aligned}$$

(4)

(4)式から、係数の個数は 9 個以上の奇数でなければならないことが判る。

### 4.6.3 2 次元磁界源探索問題

<a>前提条件と検討課題 ここでは、磁界から平面上の電流分布を計算する方法を検討する。

前提条件は、

- 1) 2 次元問題である、
- 2) 測定面と電流分布面が平行している、
- 3) 測定される磁界は測定面・電流分布面に垂直な  $z$ -方向成分である、

4) 計算対象の電流は  $x-y$  平面に分布する、  
である。

検討課題は、

- 1) ループ電流モデルを採用する、
- 2) 磁界の測定点数より多い数のループ電流を求める、
- 3) 計算法は最小ノルム法を採用する、
- 4) 具体的な計算例を示す、

である。

**<b>検討モデル** ここでは下図に示すように、ある平面導体に分布する電流密度  $\mathbf{J}$  を平面導体上の磁界  $\mathbf{H}$  を測定することによって求める問題を考える。

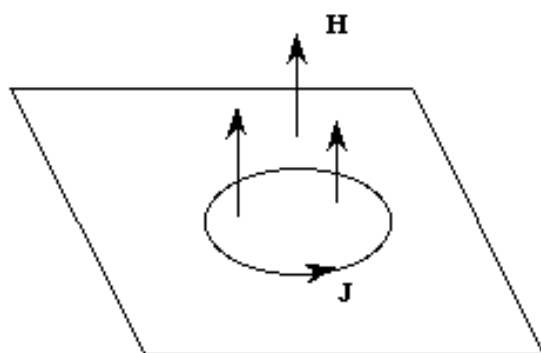


図1 ループ電流 $\mathbf{J}$ と磁界 $\mathbf{H}$

**<c>ループ電流と磁界** さて、電流密度  $\mathbf{J}$  は磁界  $\mathbf{H}$  と次式で関係づけられる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

従って、電流密度  $\mathbf{J}$  は必ず次の関係を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \cdot \mathbf{J} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

(2)式の関係はキルヒホッフの節点則と等価であり、電流密度を面積について積分したある点に流入する電流  $i$  は流出電流と等しいことを意味する。(2)式を自動的に満足する電流の一例は図2に示す環状に循環するループ電流  $i$  がある。これは環状導体の何れの部分でも必ず入る電流と出る電流が等しいことに起因する。ここでは推定される電流が図2に示すループ電流でモデル化されると仮定する。

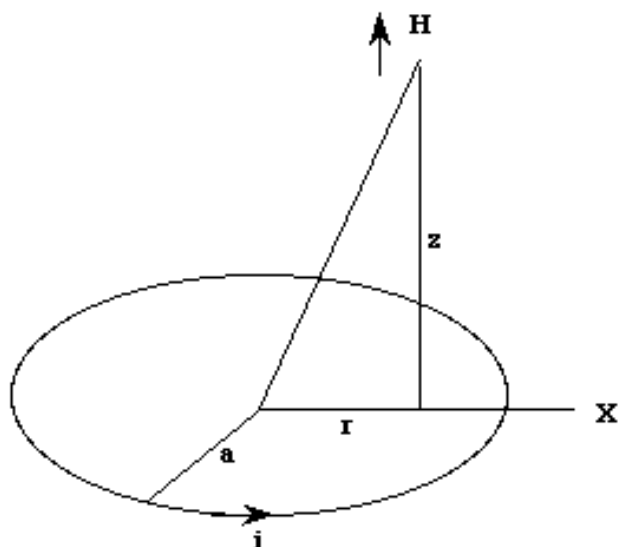


図2 ループ電流*J*の作る*z*軸方向の磁界*H*

図2のループ電流  $i$  が与える  $z$  軸方向の磁界  $H$  は(3a)式で与えられる[1]。これはループ電流  $i$  が与えられれば、ループの中心からループ面に沿った距離  $r$ 、ループ面からの高さ  $z$  における法線方向磁界  $H$  がアンペアの法則と同様な形で計算出来ることを意味する。

$$H = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \right) \left[ \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(\kappa) + K(\kappa) \right] \quad (3a)$$

$$\kappa^2 = \frac{4ra}{(r+a)^2 + z^2} \quad (3b)$$

<d>微小ループ電流モデル 図1の問題を微小ループ電流モデルに置き換える。電流の分布する対象導体を図3に示すように微小長方形に分割し、分割された微小長方形の中に電流ループを仮定する。

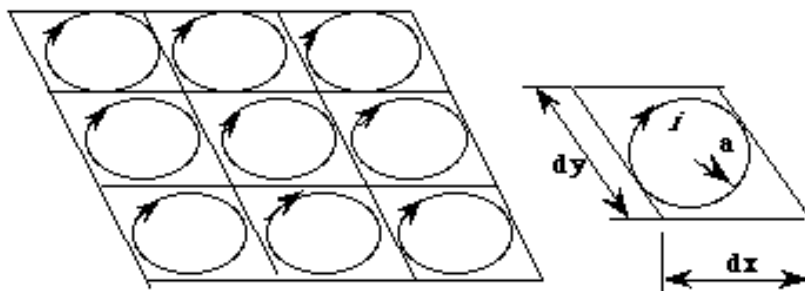


図3 ループ電流分布関数モデルの考え方

図3の微小長方形内を循環する電流を同図中に示す円形ループで置き換える。円形ループの半径は(4)式によって決める。(4)式で決まるループ半径  $a$  は微小長方形で縦横比が等しい正方形に内接する円を意味する。この場合、問題対象全体を通して各正方形の中心とモ

デルループの中心が一致し、最も良い近似となる。縦横比が異なる微小長方形では、各長方形の中心と(4)式で決まる半径を持つループの中心を一致させることから問題対象全体の形状を正方形に変形して考えることになる。従って、ループ電流分布関数モデルを適用する場合、分割された微小領域は正方形とすべきである。これは、例えば問題対象が長方形の場合、縦と横で分割数を変えることで実現される。

$$a = \sqrt{\left(\frac{dx}{2}\right)\left(\frac{dy}{2}\right)} \quad (4)$$

<e>計算の準備 メモリーの少ない機械を使う場合は下記のメモリの節約コマンドを入れる。続いて、線形代数さらにグラフィックスのパッケージを入れる。尚、これらの命令は複数回入れると error になるから注意すべきこと。

```
<<Utilities`MemoryConserve`
$MemoryIncrement=100000;
Off[General::spell1,MemoryConserve::start,MemoryConserve::end];
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
<<Graphics`PlotField`;
```

解がフーリエ級数へ展開可能と仮定した関数型重み付き逆行列法(Functional Weighted Inverse Matrix,以下、FIWIM と略記)による汎用ソルバーを以下に示す。入力、係数行列 systemMatrix、測定されたフィールドベクトル measuredVector、x-方向の分割数 mx、さらに y 方向の分割数 my であり、出力は解ベクトル weightedSolution、フーリエ級数の係数ベクトル orderVector、そして計算に使った重み行列 weightMatrix である。このパッケージは x,y 方向の位置を決める関数 xPosition と yPosition、そして係数ベクトルを計算する関数 coefficientVector を含んでいる。この汎用ソルバーでは、解の存在する長方形領域の x,y 方向の長さを単位値に正規化してあることに注意しなければならない。

```
fWIM2D[systemMatrix_, measuredVector_,mx_,my_,nx_,ny_] :=
Module[{unitMatrix, weightMatrix1, weightMatrix2,weightMatrix3,
systemMat,weightMat,inPut,i,j,m=mx my,mz,
dmx=1./mx,dmx2=0.5 dmx,omegaX=2.Pi,xPosition,xCoord,
dmy=1./my,dmy2=0.5 dmy,omegaY=2.Pi,yPosition,yCoord},
xPosition=Compile[{i,mz,dmx,dmx2},dmx2+(i-1) dmx-Floor[(i-1)/mz]];
yPosition=Compile[{i,mz,dmy,dmy2},dmy2+Floor[(i-1)/mz] dmy];
unitMatrix = Table[1., {j, m}];
weightMatrix1 = Table[0., {nx - 1}, {m}];
Do[
xCoord=xPosition[j,mx,dmx,dmx2];
```

```

weightMatrix1[[i-1,j]] = Cos[(i/2.)*omegaX*xCoord];
weightMatrix1[[i,j]] = Sin[(i/2.)*omegaX*xCoord],
{i, 2,nx - 1,2}, {j, m}];
weightMatrix2 = Table[0., {ny- 1}, {m}];
Do[
    yCoord=yPosition[j,mx,dmy,dmy2];
    weightMatrix2[[i-1,j]] = Cos[(i/2.)*omegaY*yCoord];
    weightMatrix2[[i,j]] = Sin[(i/2.)*omegaY*yCoord],
{i,2,ny - 1,2}, {j, m}];
weightMatrix3=Flatten[Outer[Times,weightMatrix1,weightMatrix2,1],1];
weightMatrix=Transpose[Join[{unitMatrix}, weightMatrix1, weightMatrix2,
    weightMatrix3]];
coefficientVector=Compile[{{systemMat,_Real,2},{inPut,_Real,1},
    {weightMat,_Real,2}},Inverse[systemMat.weightMat.inPut];
weightedSolution=weightMatrix.
    (orderVector=coefficientVector[systemMatrix,measuredVector,
weightMatrix]);{weightedSolution, orderVector, weightMatrix}];

```

ループ電流が作るループ面に法線方向磁界を計算する関数 ループ電流分布関数を定義する。楕円関数を直接使うと計算速度が遅いので展開した形で記述する。

```

bz = Compile[{r,z,rcoil}, Block[{ m1, lm1},
m1=1.- 4.*rcoil*r/((rcoil+r)^2+z^2);lm1=Log[m1];
0.0000002/Sqrt[(rcoil+r)^2+z^2] * (
    ((1.3862943611+m1*(.0966634426+m1*(.0359009238+
        m1*(.0374256371+m1*(.0145119621)))))) -
    (.5000000000+m1*(.1249859360+m1*(.0688024858+
        m1*(.0332835535+m1*(.0044178701)))))*lm1) +
    ((1.0000000000+m1*(.4432514146+m1*(.0626060122+
        m1*(.0475738355+m1*(.0173650645)))))) -
    (m1*(.2499836831+m1*(.0920018004+
        m1*(.0406969753+m1*(.0052644964)))))*lm1) *
    (rcoil^2-r^2-z^2)/((rcoil-r)^2+z^2)
    ) ] ];
hzLoop=
    Compile[{i,j,nx,mx,
        sensingLengthX,sensingLengthY,
        targetLengthX,targetLengthY,zOff,

```

```

        dnx,dnx2,dny,dny2,dmx,dmx2,dmy,dmy2},
        (
            loopRadius=Sqrt[dmx2 dmy2];
            paraX=dmx2+(i-1) dmx-
                Floor[(i-1)/mx] targetLengthX-
                dnx2-(j-1) dnx+
                Floor[(j-1)/nx] sensingLengthX;
            paraY=dmy2+Floor[(i-1)/mx] dmy-
                dny2-Floor[(j-1)/nx] dny;
            horiDist=Sqrt[paraX^2+paraY^2];
            bz[horiDist,zOff,loopRadius]
        )
    ];

```

モデル電流源分布を与える関数

```

currentF[x_,y_,mx_,my_] :=
    -5. Exp[-(x-mx+2)^2/10 -(y-my+2)^2/10]+
    6. Exp[-(x-mx+8)^2/10 -(y-my+8)^2/10]+
    5. Exp[-(x-(mx/2))^2/10 -(y-my+4)^2/10]-
    6. Exp[-(x-(mx/2))^2/10 -(y-my+10)^2/10];

```

1次元データを2次元データに変換する関数 (Partition と同じ)

```

convert2D[1Ddata_,nx_,ny_] :=
    Table[1Ddata[[i+(j nx)]],{j,0,ny-1},{i,nx}];

```

ループ電流ベクトルを作成する関数

```

vectorData[scalarData_,nx_,ny_] := Module[
    {dummyData},
    (dummyData=Table[{
        -scalarData[[i+((j-1) nx)]]-
        scalarData[[i+1+((j-1) nx)]]+
        scalarData[[i+(j nx)]]+
        scalarData[[i+1+(j nx)]],
        scalarData[[i+((j-1) nx)]]+
        scalarData[[i+(j nx)]]-
        scalarData[[i+1+((j-1) nx)]]-
        scalarData[[i+1+(j nx)]]},
        {j,ny-1,1,-1},{i,nx-1}
    ])
];

```

<f>例題 測定面の  $x$ ,  $y$  方向の長さをそれぞれ 10cm、電流分布面の  $x$ ,  $y$  方向の長さもそれぞれ 10cm とする。

ここでは  $5 \times 5 = 25$  点の磁界測定点から、 $15 \times 15 = 225$  個のループ電流を求める問題を考える。

```
sensingLengthX=0.1 ; sensingLengthY=0.1;
targetLengthX=0.1; targetLengthY=0.1;
offSet=0.001;
nx=5; dnx=sensingLengthX/nx; dnx2=dnx/2.;
ny=5; dny=sensingLengthY/ny; dny2=dny/2.;
mx=15; dmx=targetLengthX/mx; dmx2=dmx/2.;
my=15; dmy=targetLengthY/my; dmy2=dmy/2.;
n=nx ny;
m=mx my;
```

次に、図 4 にモデルループ電流分布の等高線を濃淡で示す。ループ電流は閉じた経路を流れているから、隣接するループ電流は差になり、結局、電流ベクトルはループ電流分布の等高線に沿って流れていることとなる。また、色が濃い方と薄い方それぞれ負と正に対応し、紙面の奥から読者方向を正方向としている。

```
currentDist=Table[N[currentF[x,y,mx,my]],{y,mx},{x,my}];
ListContourPlot[currentDist,
PlotLabel->"Exact loop current density map"];
```

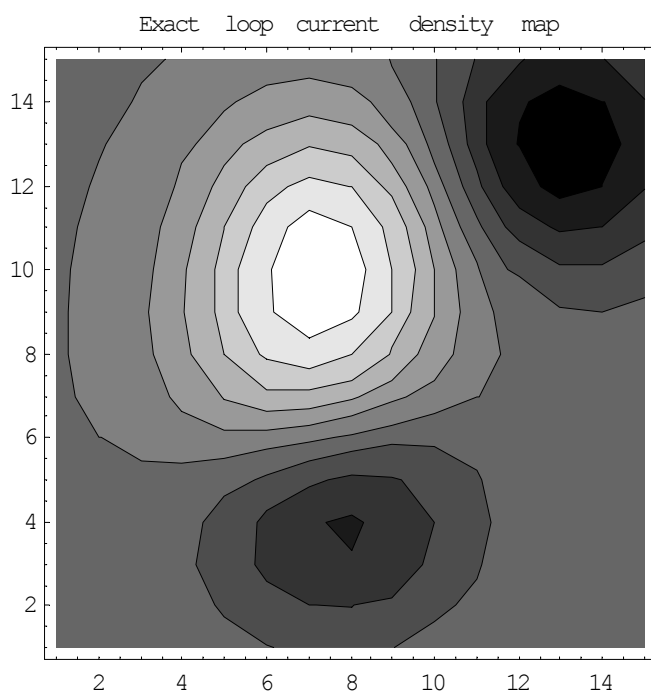


図 4 モデルループ電流分布

図 4 のループ電流分布へ回転演算することで正解の電流ベクトルを作り、図 6 に示す。



また、図 5 と 6 から電流ベクトルは右ネジの法則に従っていることが分かる。

```
ListPlotVectorField[vectorData[Flatten[currentDist],mx,my]/5,
  Frame->True,PlotLabel->"Exact loop current vectors"];
```

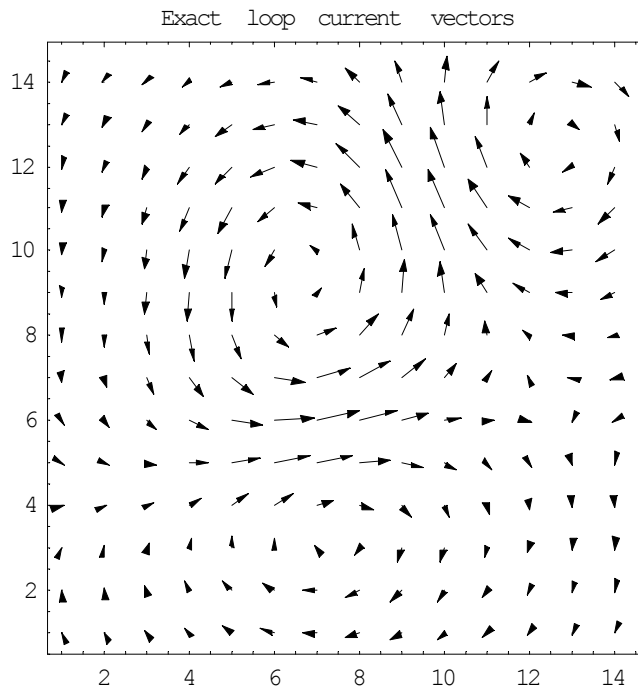


図 5 モデル電流ベクトル分布

システム行列と測定される磁界ベクトルを計算する。

```
systemMatrix=
  Table[
    hzLoop[i,j,nx,mx,sensingLengthX,sensingLengthY,
      targetLengthX,targetLengthY,offSet,dnx,dnx2,dny,
      dny2,dmx,dmx2,dmy,dmy2
    ],{j,n},{i,m}
  ];
vectorX=systemMatrix.Flatten[currentDist];
```

測定された磁界からループ電流ベクトルを重み付き逆行列法で求める。図 6 が結果である。図 4 のモデルをほぼ再現していることがわかる。図 7 が電流ベクトル分布である。図 5 とほぼ一致する。

```
Timing[solutionVector=fWIM2D[systemMatrix,vectorX,mx,my,nx,ny];]
{1.09 Second,Null}
ListContourPlot[convert2D[solutionVector[[1]],mx,my],
  PlotRange->All,PlotLabel->"Computed distribution"];
```

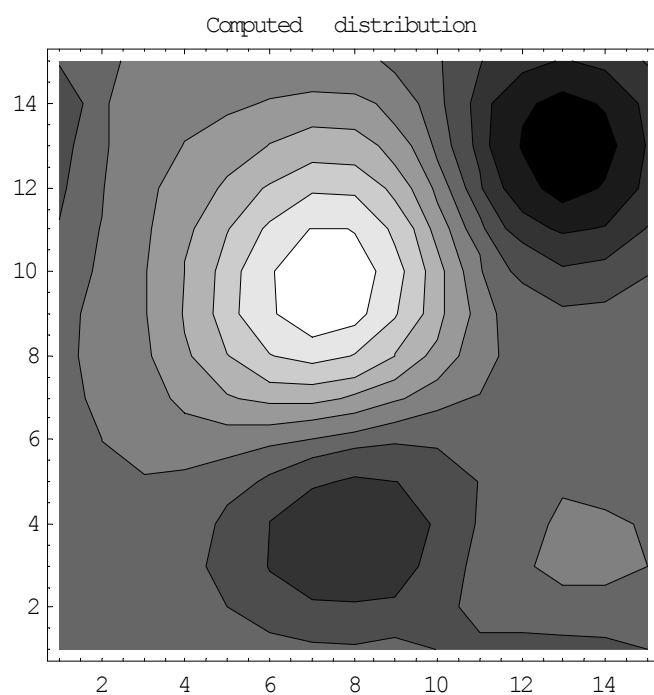


図 6 FWIM 法によるループ電流分布

```
ListPlotVectorField[
```

```
vectorData[solutionVector[[1]],mx,my]/5,
```

```
Frame->True,PlotLabel->"Computed current vectors"];
```

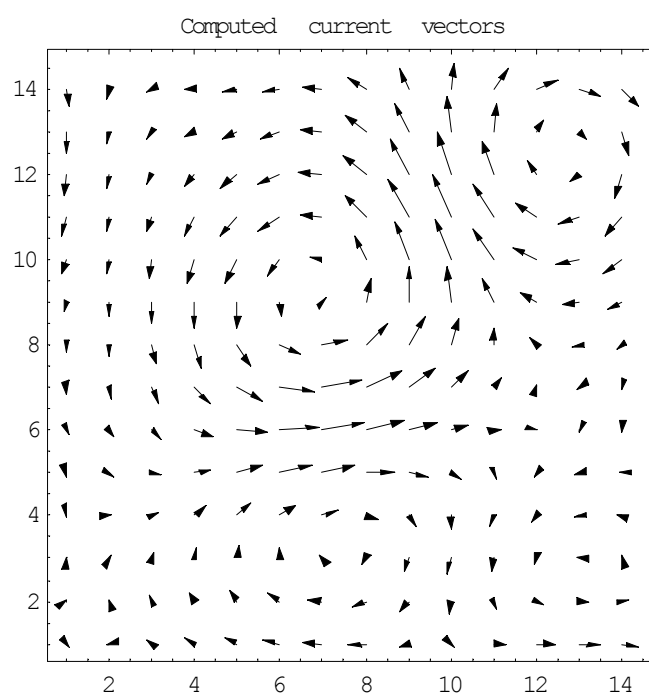


図 7 FWIM 法による電流ベクトル分布

方程式を満足する FIWM 解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最

大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[vectorX-systemMatrix.solutionVector[[1]]]]
```

0

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。解の収束状況を調べるため、係数を図示してみよう。

```
ListPlot[solutionVector[[2]],
PlotRange->All,PlotJoined->True,
PlotLabel->"Convergence of coefficients"];
```

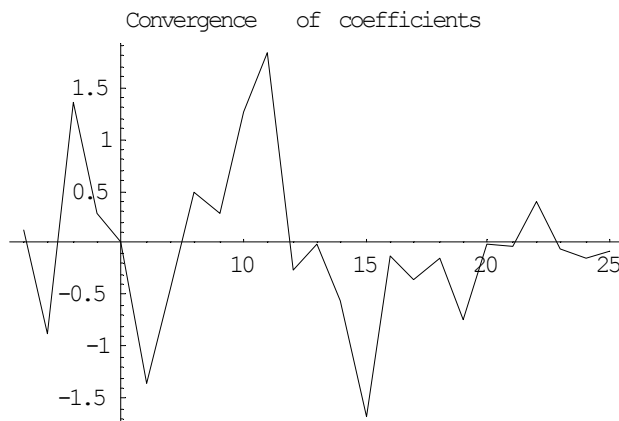


図 8 係数の値

図 8 から三角関数の係数が収束しているため、FIWM 解は正しい解を与えていることが判る。

<g>測定点数の増加 測定点数を増加して解の精度が向上するかどうかを吟味する。

```
nx=7; dnx=sensingLengthX/nx; dnx2=dnx/2.;
ny=7; dny=sensingLengthY/ny; dny2=dny/2.;
n=nx ny;
```

システム行列と測定される磁界ベクトルを計算する。

```
systemMatrix=
Table[
hzLoop[i,j,nx,mx,sensingLengthX,sensingLengthY,
targetLengthX,targetLengthY,offSet,dnx,dnx2,dny,
dny2,dmx,dmx2,dmy,dmy2
],{j,n},{i,m}
];
```

```
vectorX=systemMatrix.Flatten[currentDist];
```

測定された磁界からループ電流ベクトルを重み付き逆行列法で求める。図 9 が結果である。図 4 のモデルと異なることがわかる。図 10 が電流ベクトル分布である。電流分布も図

5 と一致しない。

```
Timing[solutionVector=fWIM2D[systemMatrix,vectorX,mx,my,nx,ny];]
{1.48 Second,Null}
ListContourPlot[convert2D[solutionVector[[1]],mx,my],
  PlotRange->All,PlotLabel->"Computed distribution"];
```

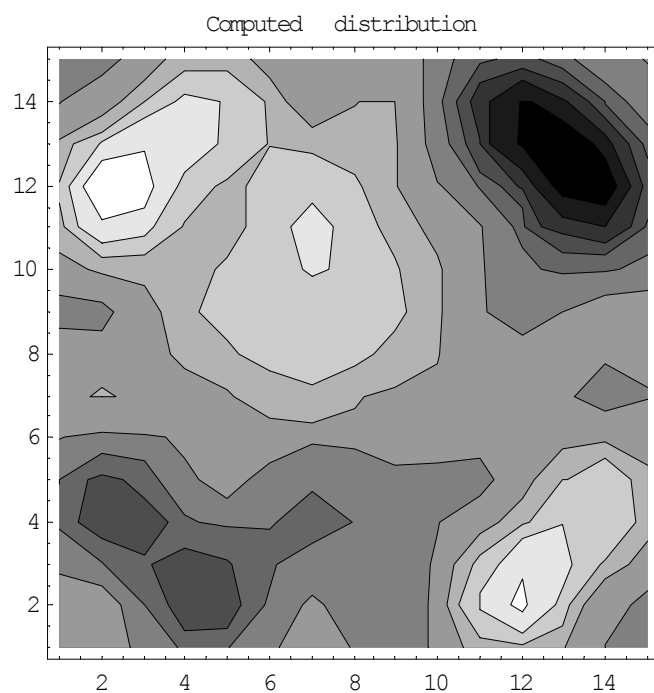


図9 FWIM 法によるループ電流分布

```
ListPlotVectorField[
  vectorData[solutionVector[[1]],mx,my]/5,
  Frame->True,PlotLabel->"Computed current vectors"];
```

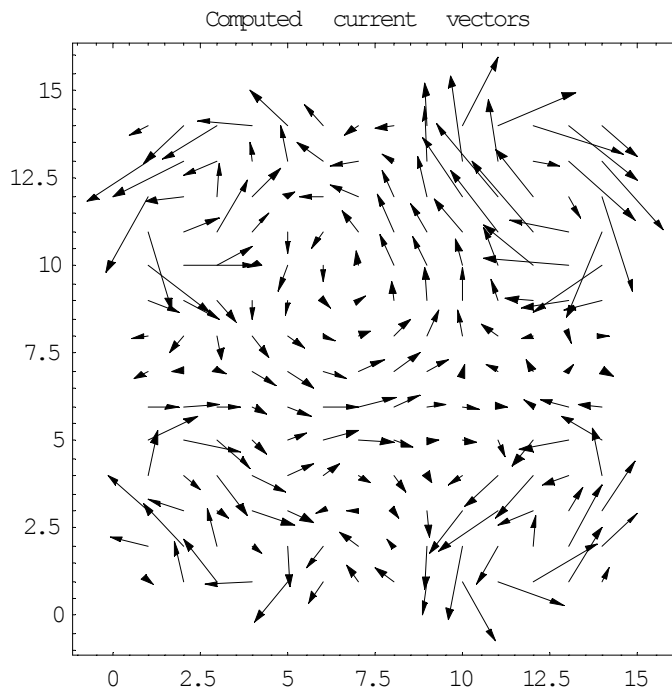


図 10 FWIM 法による電流ベクトル分布

方程式を満足する FIWM 解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[vectorX-systemMatrix.solutionVector[[1]]]]
```

```
0
```

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。解の収束性を調べるため、三角関数の係数を図示してみよう。

```
ListPlot[solutionVector[[2]],
```

```
PlotRange->All,PlotJoined->True,
```

```
PlotLabel->"Convergence of coefficients"];
```

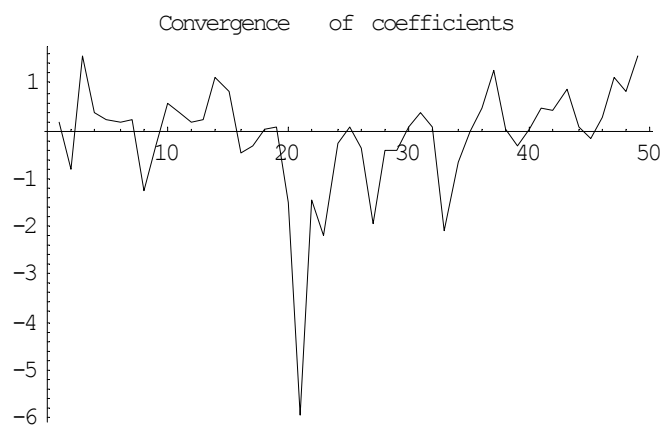


図 11 係数の値

図 11 から三角関数の係数は収束していないため、FIWM 解は正しい解で無いことが判る。

このように単純な測定点数の増加は、必ずしも解精度の向上へ繋がらないことに注意しなければならない。重み付き逆行列法は解の妥当性が係数の収束性から評価できることが判る。

**<h>物理条件の変更** 測定面の  $x$ ,  $y$  方向の長さをそれぞれ 1m、電流分布面の  $x$ ,  $y$  方向の長さもそれぞれ 1m へ変更する。さらに、 $9 \times 9 = 81$  点の磁界測定点から、 $20 \times 20 = 400$  個のループ電流を求める問題を考える。

```
sensingLengthX=1.0      ;      sensingLengthY=1.0;
targetLengthX=1.0;      targetLengthY=1.0;
offSet=0.001;
nx=9;   dnx=sensingLengthX/nx;   dnx2=dnx/2.;
ny=9;   dny=sensingLengthY/ny;   dny2=dny/2.;
mx=20;  dmx=targetLengthX/mx;   dmx2=dmx/2.;
my=20;  dmy=targetLengthY/my;   dmy2=dmy/2.;
n=nx ny;
m=mx my;
```

次に、図 12 にモデルループ電流分布の等高線を濃淡で示す。ループ電流は閉じた経路を流れているから、隣接するループ電流は差になり、結局、電流ベクトルはループ電流分布の等高線に沿って流れていることとなる。また、色が濃い方と薄い方それぞれ負と正に対応し、紙面の奥から読者方向を正方向としている。

```
currentDist=Table[N[currentF[x,y,mx,my]],{y,mx},{x,my}];
ListContourPlot[currentDist,
    PlotLabel->"Exact loop current density map"];
```

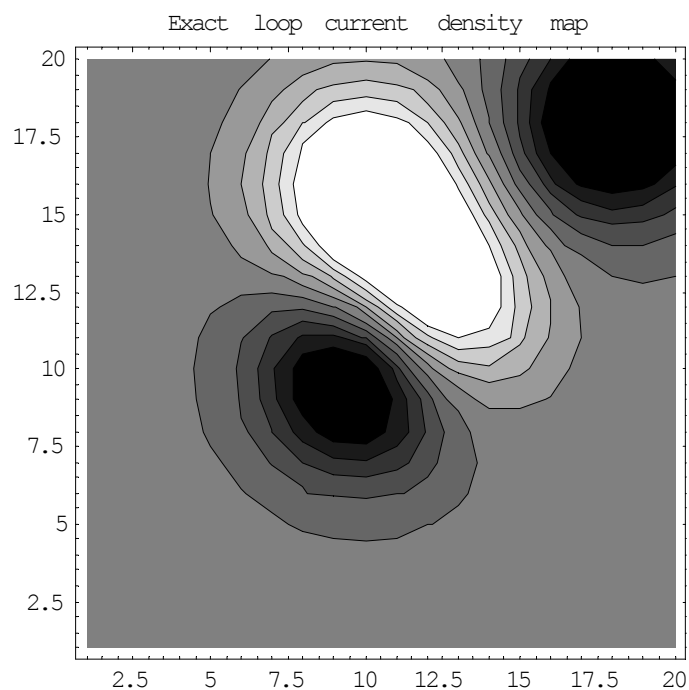


図 12 モデルループ電流分布

図 12 のループ電流分布へ回転演算することで正解の電流ベクトルを作り、図 13 に示す。  
また、図 12 と 13 から電流ベクトルは右ネジの法則に従っていることが分かる。

```
ListPlotVectorField[vectorData[Flatten[currentDist],mx,my]/5,  
Frame->True,PlotLabel->"Exact loop current vectors"];
```

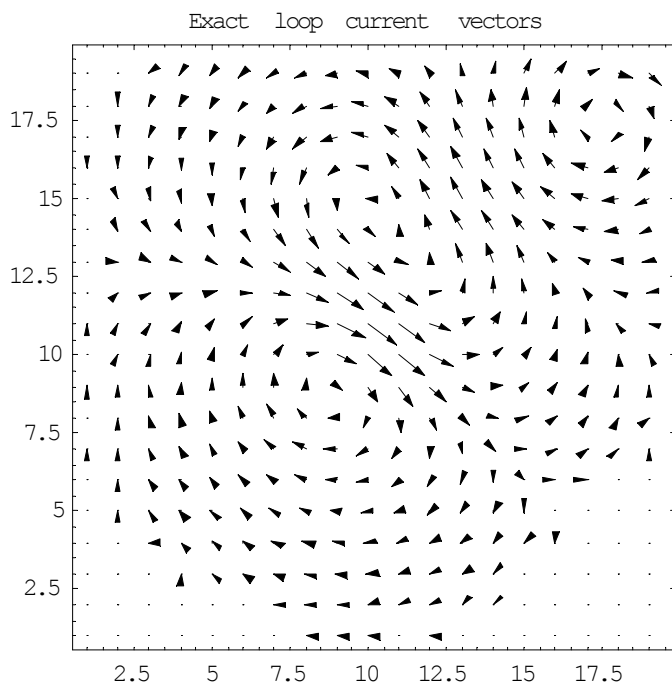


図 13 モデル電流ベクトル分布

システム行列と測定される磁界ベクトルを計算する。

```
systemMatrix=
  Table[
    hzLoop[i,j,nx,mx,sensingLengthX,sensingLengthY,
      targetLengthX,targetLengthY,offSet,dnx,dnx2,dny,
      dny2,dmx,dmx2,dmy,dmy2
    ],{j,n},{i,m}
  ];

vectorX=systemMatrix.Flatten[currentDist];
```

測定された磁界からループ電流ベクトルを重み付き逆行列法で求める。図 14 が結果である。図 12 のモデルをほぼ再現していることがわかる。図 15 が電流ベクトル分布である。多少のノイズが見られるが、図 13 とほぼ一致する分布である。

```
Timing[solutionVector=fWIM2D[systemMatrix,vectorX,mx,my,nx,ny];]
{5.16 Second,Null}
ListContourPlot[convert2D[solutionVector[[1]],mx,my],
  PlotRange->All,PlotLabel->"Computed distribution"];
```

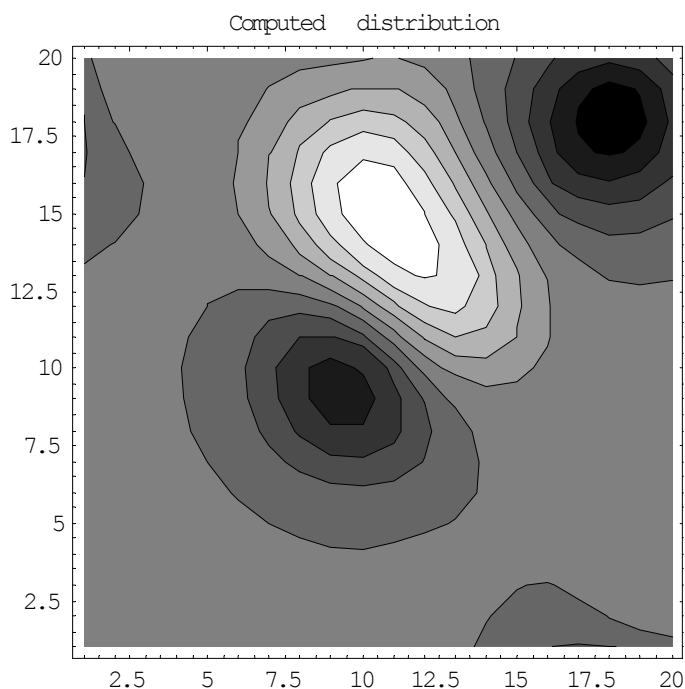


図 14 FWIM 法によるループ電流分布

```
ListPlotVectorField[
  vectorData[solutionVector[[1]],mx,my]/5,
  Frame->True,PlotLabel->"Computed current vectors"];
```



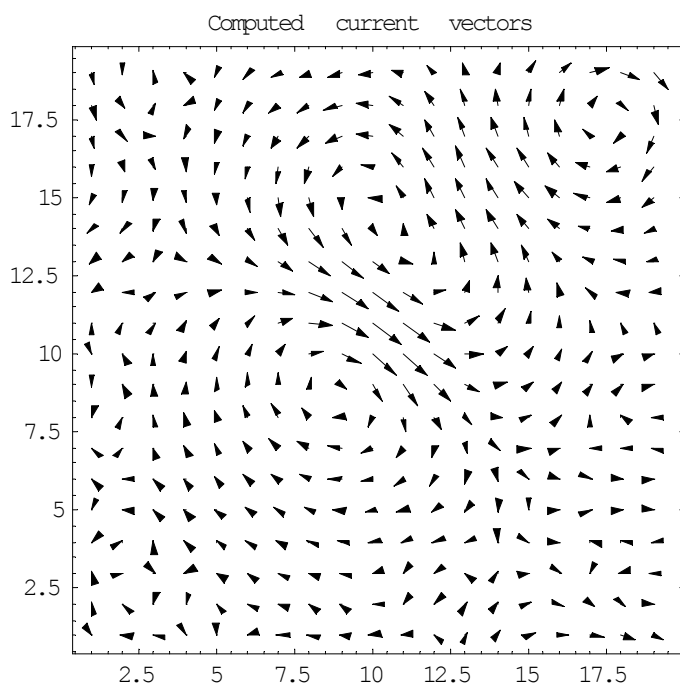


図 15 FWIM 法による電流ベクトル分布

方程式を満足する FIWM 解が得られたかを調べるため、解をシステム方程式へ代入し最大誤差を計算してみよう。

```
Max[Chop[vectoX-systemMatrix.solutionVector[[1]]]]
```

```
0
```

解ベクトルは確かに与えられた方程式を満足している。解の収束状況を調べるため、係数を図示してみよう。

```
ListPlot[solutionVector[[2]],
```

```
PlotRange->All,PlotJoined->True,PlotLabel->"Convergence of coefficients"];
```

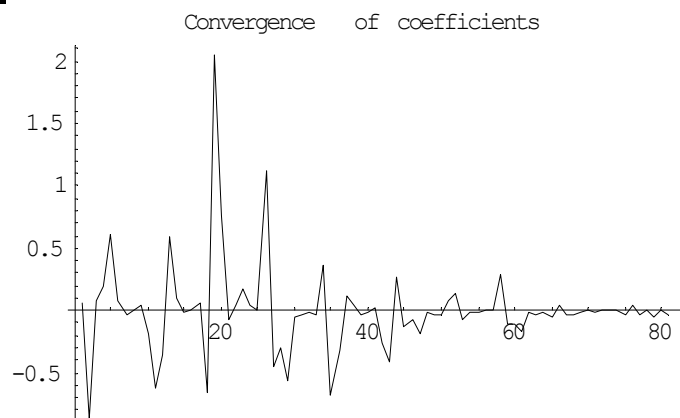


図 16 係数の値

図 16 から三角関数の係数が収束しているため、FIWM 解は正しい解を与えていることが判る。このように、測定点数を増加して精度の向上を図る場合、物理条件を変更する必要

がある。これは、重み付き逆行列法においても最適センサー配置が存在することに他ならないことを意味する。

#### **4.6.3 まとめ**

本稿では、重み付き逆行列法の 2 次元問題適用法について吟味した。その結果、FWIM 法は 2 次元磁界源探査問題に対しても、最適センサー配置が存在することを述べた。