

2007 年度

修士論文

コンデンサ中の変位電流の可視化
と
端効果に関する研究

Visualization of Displacement Currents Flowing in the Capacitors
and
a Study of Edge Effect

法政大学大学院工学研究科

電気工学専攻修士課程

ほしの けんじ
星野 賢治

学籍番号：06R3126

指導教授：齋藤 兆古

Abstract

Electrical capacitor is one of the most popular and widely used electric circuit elements storing electric field energy. Due to its mechanical structure, electric field distribution could not uniform at the edges of electrode plates constructing capacitor. This field distortion is so called edge effect.

Principal purpose of this paper is to minimize the edge effect, so that it enables us to optimize the shape of electrodes leading to the maximum capacitance but minimum size. To realize this purpose, it is essential to compute the electric fields around capacitor exactly. The electric fields around the capacitor theoretically distribute to an infinitely long distance point. In order to take into account this electric field nature rigorously, in this paper, we employ the strategic dual image (SDI) method along with conventional first order triangular finite element method.

Apply our method to the capacitor having different geometrical shape as well as permittivity clarifies the nature of edge effects of capacitors. As a result, it is suggested that one of the best geometrical structured capacitors.

- 目次 -

第 1 章 緒論	1
第 2 章 有限要素法	2
2.1 電界系汎関数	2
2.2 変分の原理	3
2.2.1 Laplace と Poisson の方程式	4
2.3 三角形一次有限要素	6
2.3.1 基礎的な考え方	6
2.3.2 一次三角形要素の表現	6
2.3.3 汎関数と三角要素	8
2.3.4 汎関数の微分	9
2.3.5 複数要素の結合	10
2.4 電界系等価回路法	11
2.5 有限要素法による電界解析	12
2.5.1 同軸角型導体の電界解析	12
2.5.2 平行板コンデンサの電界解析	16
第 3 章 双対映像法	19
3.1 概要	19
3.2 一次元問題	19
3.3 二次元問題	20
3.4 システム方程式	21
3.5 双対映像法の実例	22
3.6 双対映像法による電界解析	22
3.7 コンデンサ形状の最適化	25
第 4 章 結論	30
付録	31
参考文献	37
研究業績	38
謝辞	39

第1章 緒 論

近年のデジタル計算機の高性能化と小型化，ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらした。いわゆる，デジタル計算機がパーソナルコンピュータ(Personal Computer, 以下, PC と略記)と呼ばれる高級・多機能文房具として使われるようになった。このため，有限要素法や境界要素法で代表される電磁界の数値解析は，PC で実行可能な環境になり，この意味で，既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている[1]。

有限要素法の特徴の一つは，偏微分方程式で記述される物理現象を呈示する未知関数を，折れ線や折面に代表される区分的多項式(Piecewise polynomial)群で近似的に表そうとすることにある。この考えは，対象とする解析領域を，有限要素(Finite element)と呼ばれる単純な形状の部分領域に分割することにより実現される。また，有限差分法のように直接偏微分方程式を近似するのではなく，関連する積分表示式，汎関数，を近似することが特徴となる。いずれにしても，最終的に得られるシステム方程式は，有限差分法と同様に未知の格子点（有限要素法では節点と呼ぶ）の関数値に対する線形システム方程式となる。一方で，これらの手法は常に閉じた空間を対象とするものであるため，開領域を有する問題には適用できないという欠点もある。

有限要素法は土木工学や航空機の構造力学で誕生したと言われている。この分野においては，有限要素法の母体となるマトリックス法と呼ばれる手法がすでに存在していたが，有限要素法はマトリックス法の数学的一般化とも見なされる。

本論文では，電磁気学で遭遇する偏微分方程式を数値的に解く代表的な手法である有限要素法の中で最も初歩的な三角形一次要素を採用し，コンデンサ中を流れる変位電流の可視化とその応用に関して述べる。また，三角形一次有限要素を用いた有限要素法は，解析領域を三角形要素で離散化して近似解を得る。三角形要素による離散化は，有限の領域しかできない。それは同時に境界条件を明確に設定できるいわゆる閉領域で解くことを前提にしている。それゆえ，解が無限遠点まで広がっているような開領域の問題では直接使用することができない。この問題点を解決する双対映像法を適用する。双対映像法とは電磁気学の電気映像法を拡張したもので開領域問題を二つの閉領域問題として置き換えるという手法である。この双対映像法の適用により厳密に電磁界の開領域問題を有限要素法で解くことが可能になる[2]。

コンデンサは電氣的絶縁物である誘電体をサンドイッチ状に電極が挟む形状で構成される。電界分布は一様でなく，いわゆる端効果が存在する。このため，流れる変位電流は一様な密度で分布せず，結果として電極の有効断面積が減少する。そこで本論文の目的はコンデンサ電極の幾何学的形状に関する条件を最適化し端効果を削減することが目的であり，小型大容量のコンデンサを実現することが最終的な目標である。

第2章 有限要素法

有限要素法は任意の形状の領域を三角形などの幾何学的適応性が高い形状の要素を用いて離散化してポテンシャルの分布などを計算する方法である。例えば、三角形の要素で領域を離散化した場合、ひとつの要素内は、一次関数 $A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ によって近似され、領域内全ての要素を表す一次関数の連立によって全体の領域を表す関数を導く。全対象領域を連立したシステム方程式を解くことによってポテンシャルの分布をすることができる。領域を単に一次関数で表現しただけではポテンシャルを求めることはできないので全体のポテンシャルを連立する関数が必要であり、それらを汎関数といい、汎関数から全領域を連立するシステム方程式を導くために変分原理を導入する。これらについて後で詳しく述べるが汎関数というものは、エネルギーを表す関数であり、変分の原理は、場のエネルギーを最小にするポテンシャル分布を求める演算である。有限要素法は、任意の形状の領域を任意の形状を持つ要素によって離散化し、エネルギーを表す汎関数を変分の原理に基づき、場のエネルギーが最小になるようなポテンシャルの分布を求めるといふものである。

2.1 電界系汎関数

電界系に関するエネルギーは電界に起因する単位体積あたりのエネルギー $L_E [J/m^3]$ と、電荷に起因する単位体積あたりのエネルギー $L_p [J/m^3]$ によって表される。

$$F(\phi) = \int_S (L_E + L_p) ds \quad (1)$$

電界と電荷の間に働くエネルギーは式(2)、式(3)に示す。

$$F = qE \quad (2)$$

$$w = \int F \cdot dl = q \int E \cdot dl = qV \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F: \text{力}[N] \\ E: \text{電界}[V/m] \\ q: \text{電荷}[C] \\ w: \text{エネルギー}[J] \\ V: \text{電位差}[V] \end{array} \right.$$

電界に関する空間中の全エネルギーは次のようになる。

$$w = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i [J] \quad (4)$$

電界に関する空間中のエネルギーの単位体積あたり、つまり電界に起因する単位体積あたりのエネルギー $L_E [J/m^3]$ は、

$$\begin{aligned} \frac{w}{\Delta v} &= \frac{1}{2} V Q \frac{1}{\Delta v} = \frac{1}{2} \frac{V}{\Delta l} \cdot \frac{Q}{\Delta S} = \frac{1}{2} E \cdot D \\ &= \frac{1}{2} \epsilon E^2 \\ &= \frac{1}{2\epsilon} D^2 [J/m^3] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、 D は電束密度 $[C/m^2]$ である。

電荷に起因する単位体積あたりのエネルギー $L_p [J/m^3]$ は式(3)より次のようになる。ただし、 ρ : 電荷密度 $[C/m^3]$ 、 ϕ : 電位 $[V]$ であり、 ρ が単位体積あたりの電荷となっているので $\rho\phi$ は自動的に単位体積あたりのエネルギーになる。ただし、このエネルギーは外部からの入力に相当するから符号を負とする。

$$L_p = -\rho\phi \quad (6)$$

以上をあわせて式(1)に代入すると、次のように電界系汎関数が導出される。

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \int_S (L_E + L_p) ds = \int_S \frac{1}{2} \epsilon E^2 ds - \int_S \rho\phi ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \epsilon (\nabla\phi)^2 ds - \int_S \rho\phi ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \{ \epsilon (\nabla\phi)^2 - 2\phi\rho \} ds \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 変分の原理

変分の原理は、場のエネルギーを最小にするポテンシャル分布を求める考え方であり、エネルギーに対応する汎関数を変分の原理に適用するとエネルギーは数値パラメータに対して二次関数になるから、微係数、すなわち、ポテンシャルの変化率がゼロの部分がエネルギー最小に対応する。したがって、エネルギーに対応する汎関数へ変分の原理を適用してシステム方程式を得る方法はエネルギー最小原理で問題を解いているということである。

2.2.1 Laplace と Poisson の方程式

ここでは、非同次方程式である Poisson の方程式、式(8)について考える。

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma \quad (8)$$

$$\begin{cases} \lambda : \text{Medium Parameter} \\ \phi : \text{Potential} \\ \sigma : \text{Source Density} \end{cases}$$

$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma$ の解は汎関数を最小にすることで与えられる。

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_s [\lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma] ds \quad (9)$$

式(9)の近似解を次のようにする。

$$\varphi = \phi + \varepsilon v \quad (10)$$

$$\begin{cases} \varphi : \text{近似解} \\ \phi : \text{真の解} \\ \varepsilon : \text{数値パラメーター} \\ v : \text{微分可能な任意の関数} \end{cases}$$

式(10)の近似解を汎関数 $F(\varphi)$ に代入して式(11)を得る。

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_s \left\{ \lambda [\nabla(\phi + \varepsilon v)]^2 - 2(\phi + \varepsilon v)\sigma \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s \left\{ \lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \right\} ds + \varepsilon \int_s [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_s \lambda [\nabla v]^2 ds \\ &= F(\phi) + \varepsilon \int_s [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_s \lambda [\nabla v]^2 ds \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)の第一変分 $\delta F = 0$ を求めると、第一変分は式(12)で定義される。以下展開する。

$$\delta F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\nabla \phi + \varepsilon v) - F(\phi)}{\varepsilon} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta F &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_s \varepsilon [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_s \lambda [\nabla v]^2 ds}{\varepsilon} \\ &= \int_s [\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v - v \sigma] ds = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

関数 $F(\phi + \epsilon v)$ は ϵ に対して二次関数であり、 ϵ^2 の係数は常に正である。従って、第一変分 $\delta F = 0$ の極値は図 1 のように汎関数 $F(\phi + \epsilon v)$ の最小値を意味する。式(13)を変形するために次の Green の定理を考える。

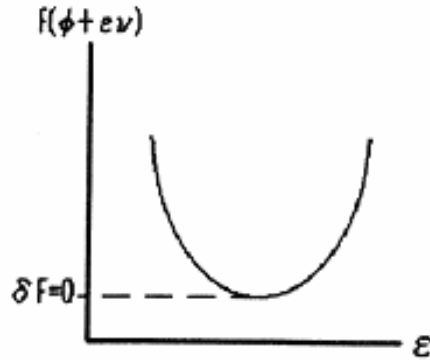


図 1 汎関数のグラフ

Green の定理とは面積分と線積分の関係、または体積分と面積分の関係を表す式で Gauss の法則に基づいている。Gauss の法則は、ある閉空間に存在する全電荷の総和は、その閉空間の表面から垂直に出て行く電界の和と等しいというエネルギー保存則である。Green の定理は式(14)となる。

$$\int_V \nabla \cdot (v \nabla \phi) dv = \int_S v \nabla \phi \cdot ds \quad (14)$$

$$\int_V (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) dv = \int_S v \nabla \phi \cdot ds \quad (15)$$

Green の定理の二次元形は

$$\int_S (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) ds = \int_C v \nabla \phi \cdot dl \quad (16)$$

であるから式(16)は式(17)となる。以下のように展開する。

$$\int_S (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) ds = - \int_S v (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) ds + \int_C \lambda v (\partial \phi / \partial n) \cdot dl \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta F &= - \int_S v (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) ds + \int_C \lambda v (\partial \phi / \partial n) \cdot dl \\ &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式は、(13)式の第 1 変分が $\lambda \nabla^2 \phi + \sigma = 0$ と $\partial \phi / \partial n = 0$ の同時に満足する解を与えることを意味する。 $\partial \phi / \partial n = 0$ は境界の法線方向 n への Potential ϕ の変化率が零であることを意味し、同時 Neumann 条件 (Homogeneous Neumann condition)、または対称境界条件 (Symmetrical boundary condition) と呼ばれる。

2.3 三角形一次有限要素

2.3.1 基礎的な考え方

偏微分方程式を変分原理に基づいて解くには、エネルギーに対応する汎関数(Functional)を求め、この汎関数に近似解を代入し、汎関数の第一変分 $\delta F=0$ を取り、システム方程式を導き、得られたシステム方程式を解き、偏微分方程式の解を得ることになる。

具体的な手順は以下の通りである。

- A) 問題空間を三角形要素で離散化する。
- B) 各三角形要素内で近似解を仮定する。
- C) 各三角形要素の汎関数を求める。
- D) 要素の接合条件から全体の汎関数を得る。
- E) 第一変分 $\delta F=0$ を取りシステム方程式を導く。
- F) 境界条件(Boundary condition)を入れてシステム方程式を解く。

2.3.2 一次三角形要素の表現

一次元の近似について考えると以下のようなになる。

$$\text{一次近似: } y = \alpha + \beta x$$

$$\text{二次近似: } y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$\text{三次近似: } y = \alpha + \beta x + \delta x^2 + \epsilon x^3$$

これらの近似は既知の値 y が与えられて定数 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などを求めて既知の値 y の値を補完することになるわけであるが、一次近似であれば既知の値 y が最低 2 点なければ定数 α を求めることができず、二次近似であれば既知の値 y が 3 点必要で三次近似であれば 4 点必要となる。これを二次元で考えると次のようになる。

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \dots \quad (19)$$

この式の中から x, y のバランスがよくなるように項を選び出す必要がある。最初の三項を用いると式(20)と表すことができる。

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = [1xy] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

この式の傾き成分を求めるには既知の値 ϕ が 3 つ必要である. それこそが, すなわち, 三角形の領域を表現することになる.

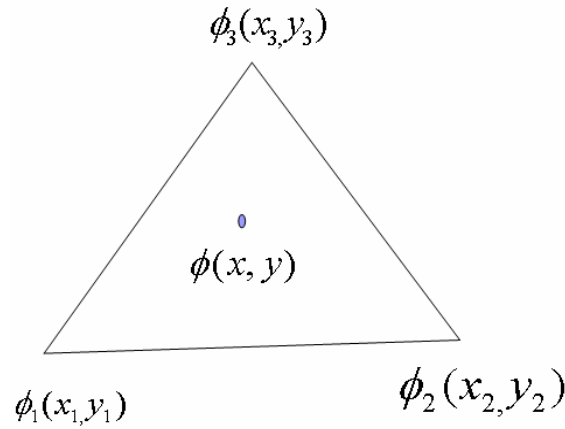


図 2 三角形要素

図 2 の一次三角形要素がある. 領域内の傾きは, 以下の手順により求めることができる.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \\
 \phi &= \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \\
 \phi &= \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} C^{-1} \phi
 \end{aligned} \tag{21}$$

ここで, C^{-1} は次のようになる. Δ は三角要素の面積である.

$$\begin{aligned}
 C^{-1} &= \frac{1}{\det C} \begin{vmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & -(y_3 - y_2) & x_3 - x_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) & (y_3 - y_1) & -(x_3 - x_1) \\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) & -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{22}$$

2.3.3 汎関数と三角要素

2.3.2 の節で求めた三角形要素を汎関数に代入する.

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i a_i$$

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \nabla a_i$$

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \{ \lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \} ds$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_S \lambda \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_i \phi_j \nabla a_i \nabla a_j ds - \int_S \sum_{i=1}^3 \phi_i a_i \sigma ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \lambda (\phi_1 \phi_1 \nabla a_1 \nabla a_1 + \phi_1 \phi_2 \nabla a_1 \nabla a_2 + \phi_1 \phi_3 \nabla a_1 \nabla a_3 \\ &\quad + \phi_2 \phi_1 \nabla a_2 \nabla a_1 + \phi_2 \phi_2 \nabla a_2 \nabla a_2 + \phi_2 \phi_3 \nabla a_2 \nabla a_3 \\ &\quad + \phi_3 \phi_1 \nabla a_3 \nabla a_1 + \phi_3 \phi_2 \nabla a_3 \nabla a_2 + \phi_3 \phi_3 \nabla a_3 \nabla a_3) ds \\ &\quad - \int_S (\phi_1 a_1 + \phi_2 a_2 + \phi_3 a_3) \sigma ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \lambda \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\nabla a_1)^2 & \nabla a_1 \nabla a_2 & \nabla a_1 \nabla a_3 \\ \nabla a_1 \nabla a_2 & (\nabla a_2)^2 & \nabla a_2 \nabla a_3 \\ \nabla a_1 \nabla a_3 & \nabla a_2 \nabla a_3 & (\nabla a_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \int_S \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \sigma ds \quad (23)$$

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} \cot \theta_3 + \cot \theta_2 & -\cot \theta_3 & -\cot \theta_2 \\ -\cot \theta_3 & \cot \theta_3 + \cot \theta_1 & -\cot \theta_1 \\ -\cot \theta_2 & -\cot \theta_1 & \cot \theta_1 + \cot \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

これで汎関数を表す行列が求まった。汎関数は、エネルギーを表すものであり、これをポテンシャルについての変化率がゼロの時の解を求めるべき解であるからこの式を ϕ^i について微分する。(付録 A 参照)

2.3.4 汎関数の微分

汎関数の第一項の微分について考えてみる．小さい行列で同様の形を作って微分してみると次のような法則がある．

$$\begin{aligned}
 M &= (\phi_1 \quad \phi_2) \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \\
 &= [\phi_1 s_{11} + \phi_2 s_{21} \quad \phi_1 s_{12} + \phi_2 s_{22}] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \\
 &= \phi_1^2 s_{11} + \phi_1 \phi_2 s_{21} + \phi_1 \phi_2 s_{12} + \phi_2^2 s_{22}
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} M &= \begin{bmatrix} 2\phi_1 s_{11} + \phi_2 s_{21} + \phi_2 s_{12} \\ \phi_1 s_{21} + \phi_1 s_{12} + 2\phi_2 s_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\phi^T s \phi) = (s + s^T) \phi \tag{28}$$

第二項微分について

$$M = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\phi^T U) = U \tag{31}$$

よって式(32)が導出できる．

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{1}{2} (s + s^T) \phi - U \tag{32}$$

ここで，式(24)を見ると $s_{ij} = s_{ji}$ であるから， $s = s^T$ となる．よって，

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = s \phi - U \tag{33}$$

以上の結果から汎関数の微分は次のようになる.

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\lambda}{4} \begin{bmatrix} \cot \theta_2 + \cot \theta_3 & -\cot \theta_3 & -\cot \theta_2 \\ -\cot \theta_3 & \cot \theta_1 + \cot \theta_3 & -\cot \theta_1 \\ -\cot \theta_2 & -\cot \theta_1 & \cot \theta_1 + \cot \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

2.3.5 複数要素の結合

複数要素の結合について考えてみる. 複数個の要素がある場合, 全体のエネルギーは複数個の要素がそれぞれ有するエネルギーの総和であるということになる. 変分の原理は, そのエネルギーの総和についても成り立つ.

$$F^{(all)} = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + \dots \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi^{(all)}} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(all)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(all)}} + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \phi^{(all)}} + \dots \\ &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \phi^{(3)}} + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

図3のような2つの要素がある. 1つ目のエネルギーを $F^{(1)}$, 2つ目のエネルギーを $F^{(2)}$ とする. 全体のエネルギーは式(37)となる.

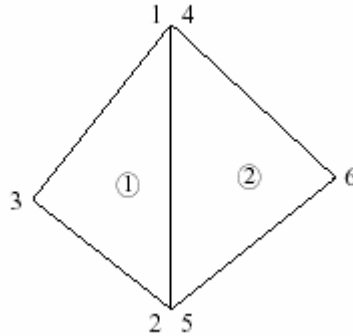


図3 二つの要素の結合

$$\frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi^{(all)}} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & s_{31}^{(2)} & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\phi_1 = \phi_4, \phi_2 = \phi_5$ であることと、 $\frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi} = 0$ について展開すると式(38)のようなシステム方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & 0 & s_{13}^{(2)} \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} & 0 & s_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{31}^{(2)} & s_{32}^{(2)} & 0 & s_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ 0 \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} + s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(1)} + s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(1)} & s_{13}^{(2)} \\ s_{21}^{(1)} + s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(1)} + s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(1)} & s_{23}^{(2)} \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & 0 \\ s_{31}^{(2)} & s_{32}^{(2)} & 0 & s_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(1)} + U_1^{(2)} \\ U_2^{(1)} + U_2^{(2)} \\ U_3^{(1)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (38)
 \end{aligned}$$

よって本来一次三角形要素を用いた有限要素法による解析は、解析領域を多数の三角形要素に分割して解くことになるが、本節によりシステム方程式を複数回足すことによって、解析領域のシステム方程式を求めることができる。

2.4 電界系等価回路法

図4に示すような導体を一次三角形要素として考慮し、分割した図から汎関数のパラメーターを考える。

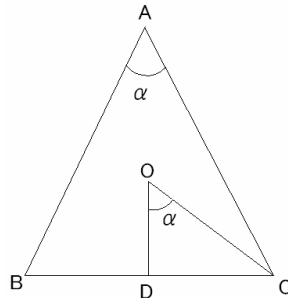


図4 三角形要素

有限要素法で導いた三角形一次要素の節点間のパラメーターを図4に従い変形すると式(39)となる。

$$\frac{\varepsilon}{2} \text{Cot} \alpha = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{OD}{DC} \quad (39)$$

二次元の偏微分方程式は無限に厚い三次元空間の単位厚さ部分で成り立っていると仮定しているので、式(39)の $(\varepsilon/2)(OD/DC)$ は単位厚さ当たりになり立つパラメータである。キャパシタンス C は誘電率 ε と電極面積 $1 \times OD$ に比例し、電極間距離 DC に反比例するから、明らかに $(\varepsilon/2)\text{Cot} \alpha$ は節点 B, C 間のキャパシタ

ンスとなる．以上のことから電界系の偏微分方程式は等価回路を描くことにより電気回路の知識で解くことが可能とされ，解析を容易にする[3]．

2.5 有限要素法による電界解析

2.5.1 同軸角型導体の電界解析

2.1から2.4まで有限要素法理論を述べたが，本節では，理論に基づき解析を行う．図5のような同軸角型導体をサンプルとして解析を行う．

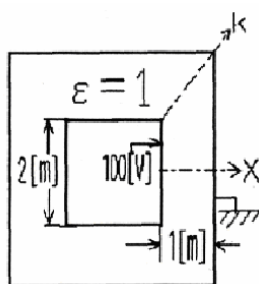


図5 同軸角型導体

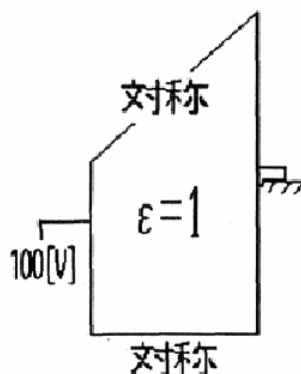


図6 解析領域

X 軸と K 軸に沿って $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ の対称境界条件が成り立つので，解くべき問題領域は，図6の領域となる．支配方程式は式(40)となる．

$$\epsilon \nabla^2 \phi = 0 \quad (40)$$

図7のように図6の解析領域を6個の直角二等辺三角形に分割する．

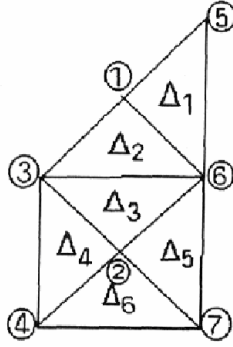


図7 離散化した解析領域

この場合の固定境界条件は式(41)となる.

$$\begin{aligned}\phi_3 = \phi_4 = 100 \\ \phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = 0\end{aligned}\tag{41}$$

システム方程式は, 式(42)となる.

$$\frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi^{(all)}} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \dots\tag{42}$$

以下のように展開する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot \theta_5 + \cot \theta_6 & 0 & 0 & 0 & -\cot \theta_6 & -\cot \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cot \theta_6 & 0 & 0 & 0 & \cot \theta_1 + \cot \theta_6 & -\cot \theta_1 & 0 \\ -\cot \theta_5 & 0 & 0 & 0 & -\cot \theta_1 & \cot \theta_5 + \cot \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} \\
& = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T
\end{aligned} \tag{43}$$

$$s\Psi = U$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式(43)に固定境界条件を入れて式を変形すると、以下のように解ベクトルを求めることができる。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} = 0 \\
& \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 200 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \end{bmatrix} \\
& \Psi = [25 \ 50 \ 100 \ 100 \ 0 \ 0 \ 0]^T
\end{aligned} \tag{44}$$

また、この解ベクトルから汎関数を求めると、式(45)となる。

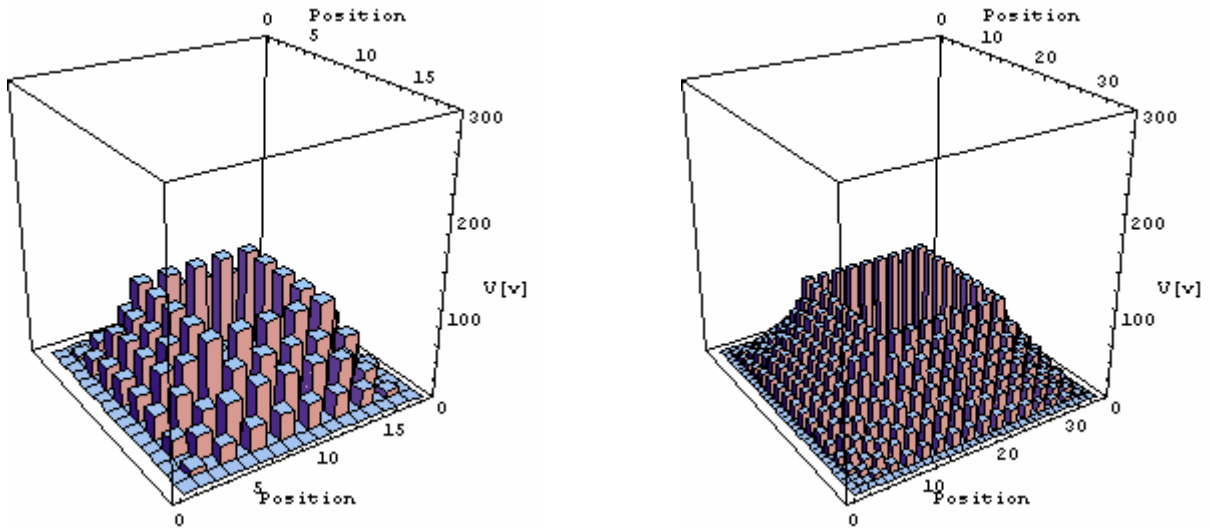
$$F(\phi) = \frac{1}{2} \Psi^T s\Psi = 6875 [J/m] \tag{45}$$

汎関数はエネルギーを示す関数であり、この計算領域は 1/8 より、8 倍にすることで全体の静電容量を求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c(100-0)^2 &= 8 \times 6875 [J/m] \\ C &= 11 [F/m] \end{aligned} \tag{46}$$

なお、この系の解析解による厳密な解による静電容量は 10.2[F/m]である。この例題を解いて分かったことは、有限要素法によって求めた静電容量は、大きめの値を与えることが分かった。

また、このように離散化し解析したポテンシャル分布を図 8 に示す。図 8 ではより細かな結果を出すため分割個数を 192 個、792 個として解析している。この個数は問題領域全体の分割個数を示す。当然、対象境界条件が成り立っているので分布図も対象になっているのがわかる。また、分割個数を増やしていくと滑らかなポテンシャル分布になっているのが見てとれる。勾配は双曲線関数になっている。



(a) 分割個数 192 個

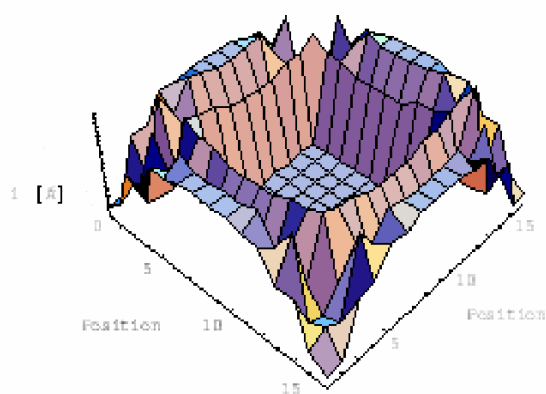
(b) 分割個数 792 個

図 8 ポテンシャル分布

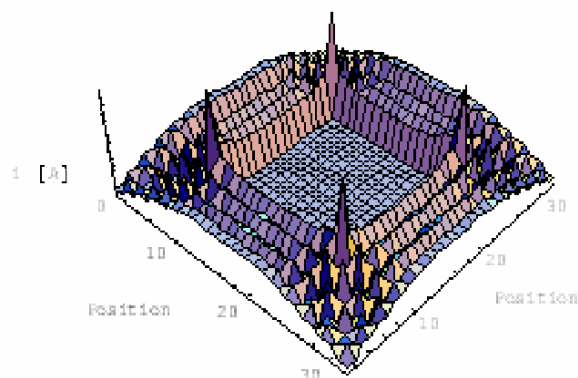
有限要素法によりポテンシャルを解析することに成功したが、その結果から変位電流がどのように流れているか解析を試みる。変位電流密度 J_D は式(47)によって導かれる。

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} \tag{47}$$

ここで、 D は等価回路のコンデンサの電極を通過する電束密度を示す。2.4 の節で述べた等価回路法に基づき、仮想的に考えたコンデンサ間に流れる変位電流の振幅分布を図 9 に、変位電流ベクトル分布を図 10 に示す。図 10 のベクトルは離散化した一つの三角形の各辺に流れる変位電流を合成し、外心上に置いたものである。

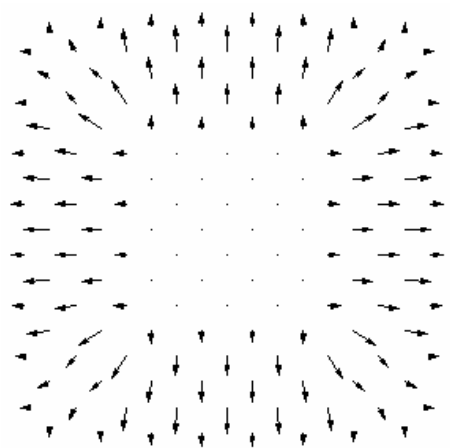


(a) 分割個数 192 個

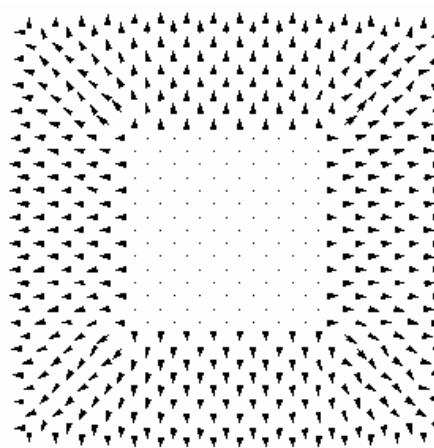


(b) 分割個数 792 個

図 9 変位電流マグニチュード分布



(a) 分割個数 192 個



(b) 分割個数 792 個

図 10 変位電流ベクトル分布

図 9, 図 10 から角型導体を有限要素によって離散化し, 等価的にキャパシタンスを設定すると, 角型導体の頂点に向かう変位電流が他の変位電流に比べ異なることがわかる. これは, 同軸四角形導体の頂点が不連続な変曲点であるため, 他の部分に比較して簡単な関数でポテンシャルが近似出来ないことを意味する.

2.5.2 平行板コンデンサの電界解析

本節では, 平行板コンデンサに流れる変位電流を有限要素法により解析し, 端効果 (Edge Effect) がどのような影響を与えているか検証する. 端効果とは, 一般的に様々な物に発生し端部に影響を与える現象である. 基本的には性能低下を引き起こす現象である. コンデンサに関して言うならば, 高校, 大学物理の電磁気学の問題では多くの場合無視されるケースが多く, 微小な影響とされることがあった. しかし, コンデンサに流れる変位電流は端に特異な電流が流れ, 静電容量 C の公式: $C = \epsilon S / d$ が成り立たなくなってしまう. 実際には縁の近辺で電荷密度が増し容量が大きくなる. 過去に近似式が導出されたが, どれも諸条件の設定が多く現実的ではなかった. 本節では, 図 11 のような一般的な平行板コンデンサを有限要素法により解析を試みる. 図中の点線は解析領域を示す.

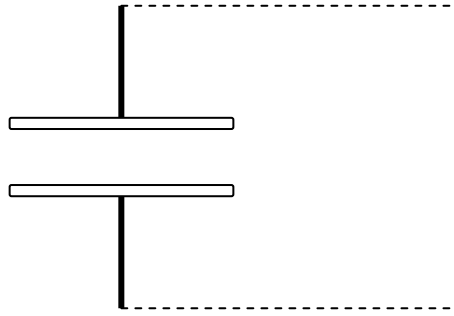


図 11 平行板コンデンサの解析領域

三角形有限要素で図 11 の対称領域を離散化し、三角形 800 個と 3200 個に分割し、2 ケースについて解析を行った。図 12 は変位電流ベクトル分布、図 13、図 14 は変位電流のマグニチュード分布の三次元プロット図と二次元等高線をそれぞれ示す。

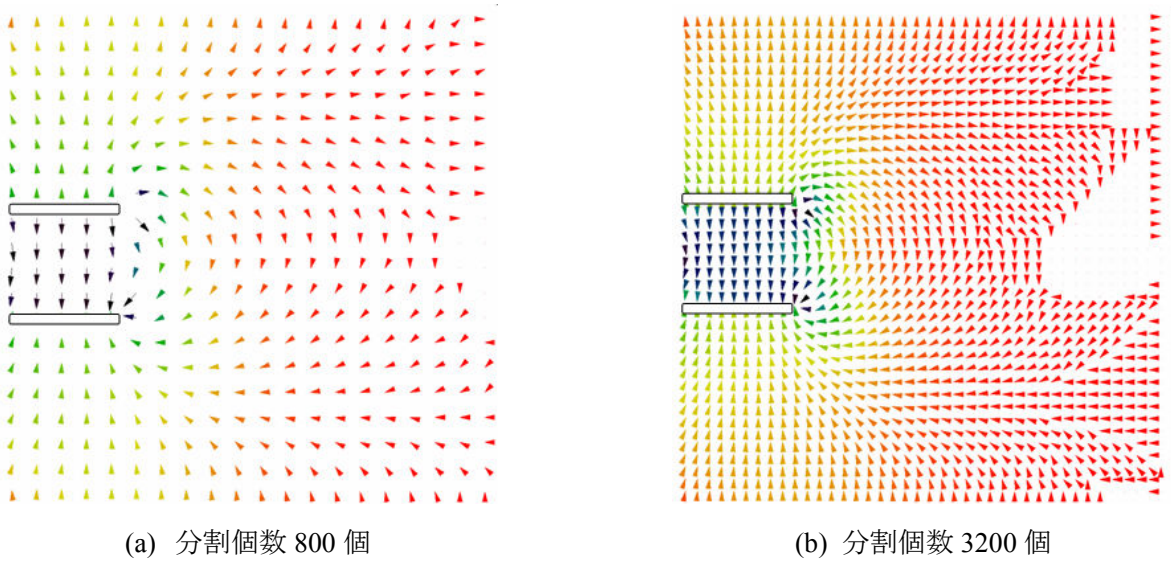


図 12 変位電流ベクトル分布

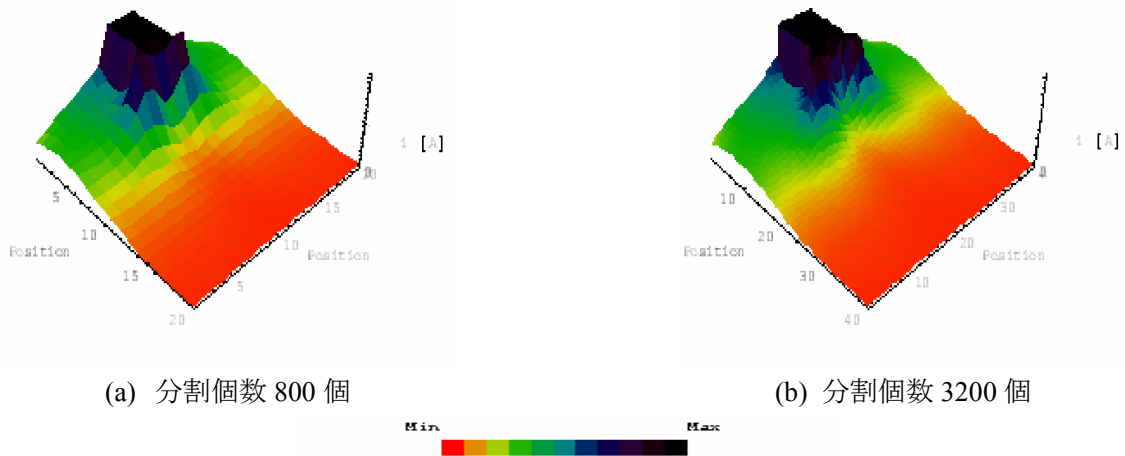


図 13 変位電流マグニチュード分布(三次元プロット図)

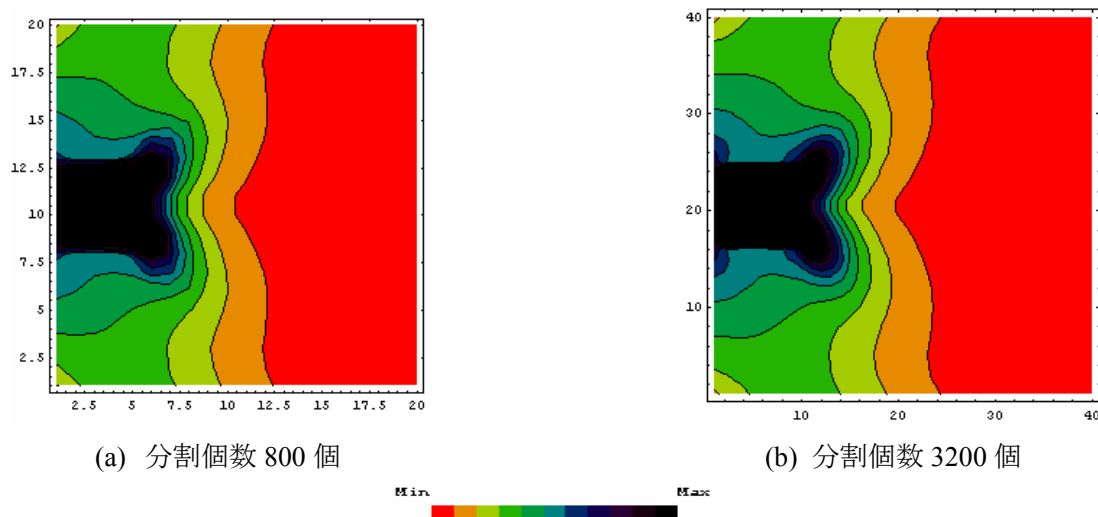


図 14 変位電流マグニチュード分布(二次元等高線)

図 10 から平行板コンデンサの電極間に流れている変位電流が均一に流れていないことがわかり、端効果がどのような影響を及ぼすのかがよくわかる。数値的に吟味しても中央付近と端の方の変位電流では差が存在した。図中のベクトルが表記されていない領域は、数値的にみてベクトルの大きさが電極付近と比較して微小である。このことから平行板コンデンサがどの付近まで実質的に影響を与えるかがみてとれる。

図 13 と図 14 から電極間の変位電流と周辺に流れる変位電流にどの程度の違いが生じているかわかる。数値的には、この領域では電極間の変位電流と端部の変位電流では数千倍の違いがあり端効果が微小な影響を与えていることがわかる。

また、本節では同時に有限要素法の分割個数による信頼度評価を行った。分割個数を 4 倍にして計算した 3200 個の方が細かく滑らかに出力されており、解の精度が向上していることを示している。

第3章 双対映像法

3.1 概要

三角形一次有限要素を用いた有限要素法は、解析領域を三角形要素で離散化して近似解を得る。三角形要素による離散化は、有限の領域しかできない。それは同時に境界条件を明確に設定できる、いわゆる閉領域で解くことを前提にしている。それゆえ、解が無限遠点まで広がっているような開領域の問題では直接使用することができない。そこで、本章では開領域問題を解くための手法として双対映像法(Strategic Dual Image : SDI)について述べる[2]。双対映像法は、電磁気学の電気映像法を拡張したもので、映像を仮定することで開領域問題を閉領域問題に置き換えて有限要素解を得る解法であり、開領域問題で解く方法として非常に有効な解法である。また二次元解析の場合、解析領域は円となる特徴を持つ[4]。

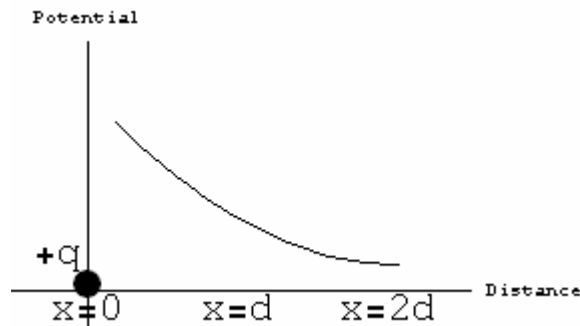
3.2 一次元問題

一次元問題においてベクトルフィールドは、回転方向成分あるいは発散方向成分のどちらかしか存在しない。図15(a)のように $x=0$ 地点に $+q$ の電荷があるとす。このときの Potential の分布は無遠点まで広がる。

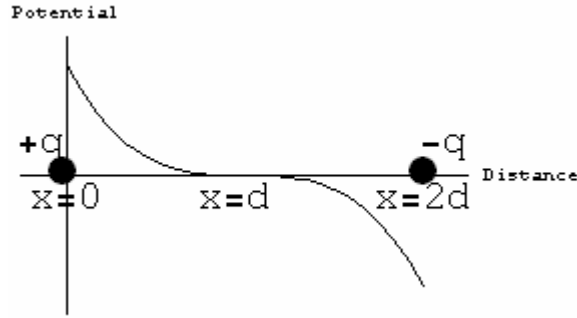
双対映像法の解を得る過程は以下のように整理される。

- A) 図15(b)のように $x=2d$ 地点に $-q$ のイメージ電荷を仮定すると、 $x=d$ 地点で Potential がゼロになり、ゼロ境界条件が成立する。
- B) 図15(c)のように $x=2d$ 地点に $+q$ のイメージ電荷を仮定すると、 $x=d$ 地点で対象境界条件が成立する。
- C) A), B)の解の平均をとることで開領域問題の有限要素解を得る。

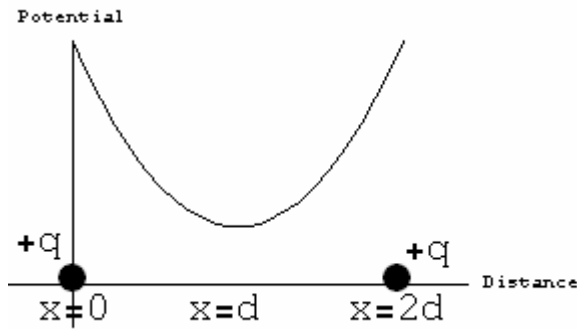
それはすなわち、仮想境界 $x=d$ にゼロ境界条件、対象境界条件を設定することができるので閉領域問題として解くことができる。



(a) 電荷 $+q$ の Potential 分布



(b) 電荷+qとイメージ電荷-q



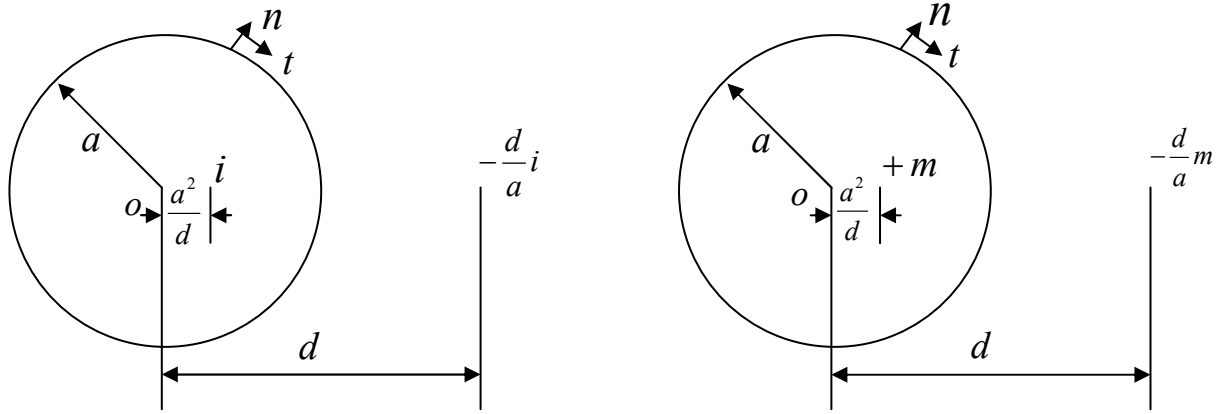
(c) 電荷+qとイメージ電荷+q

図 15 一次元問題による双対映像法の概念

3.3 二次元問題

二次元問題において開領域の電界は、電界の強さ \mathbf{E} の回転方向成分 \mathbf{E}_t と電束密度 \mathbf{D} の発散成分 \mathbf{D}_n からなる。双対映像法の解を得る過程は以下のように整理される。

- A) 回転方向成分 \mathbf{E}_t を求める。図 16(a) のように半径 a の仮想境界円内の電界源を電流 i とみなし、その電流に対するイメージ電流 $-(d/a)i$ を仮定すると、仮想境界上で Vector Potential \mathbf{A} はゼロとなり、発散方向成分 $\mathbf{D}_n=0$ となる。よって回転方向成分 \mathbf{E}_t が求まる。このとき仮想境界上では、Vector Potential $\mathbf{A}=0$ になる。
- B) 発散方向成分 \mathbf{D}_n を求める。図 16(b) のように半径 a の仮想境界円内の電界源を電荷 q とみなし、その電荷に対するイメージ電荷 $-(d/a)q$ を仮定すると、仮想境界上で Scalar Potential V はゼロとなり、回転方向成分 $\mathbf{E}_t=0$ となる。よって発散方向成分 \mathbf{D}_n が求まる。このとき仮想境界上では、 $\partial\mathbf{A}/\partial n=0$ になる。
- C) 開領域問題の解を求める。3.2 の節の一次元問題と同様に仮想境界をゼロ境界条件、対象境界条件として設定し、両方で得た解の平均をとることで開領域問題の解を得る。



(a) 回転方向成分を求めるイメージ

(b) 発散方向成分を求めるイメージ

図 16 二次元問題による双対映像法の概念

3.4 システム方程式

双対映像法でフィールドの回転方向成分と発散方向成分を求めるシステム方程式を式(48)とする。式(48)は、すでに固定境界条件に関する行列要素、ベクトル要素を取り除いていることに注意しなければならない。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

C_{11}	仮想境界内部の係数行列
C_{21}, C_{12}	仮想境界上と仮想境界内部を結ぶ係数行列
C_{22}	仮想境界上の係数行列
\mathbf{X}_1	仮想境界内部の解ベクトル
\mathbf{X}_2	仮想境界上の解ベクトル
\mathbf{F}_1	仮想境界内部からの入力ベクトル
\mathbf{F}_2	仮想境界上からの入力ベクトル

(付録B参照)

仮想境界にゼロ境界条件を設定し、回転方向成分 \mathbf{E}_t を求める。仮想境界をゼロ境界として、解いた解ベクトルを $(\mathbf{X}_{1z}^T \ \mathbf{X}_{2z}^T)^T$ とすると $\mathbf{X}_{2z} = \mathbf{0}$ の固定境界条件となるので、固定境界条件のシステム方程式、式(48)から式(49)となる。

$$C_{11} \mathbf{X}_{1z} = \mathbf{F}_1 \quad (49)$$

仮想境界に対象境界条件を設定し、発散方向成分 \mathbf{D}_n を求める。仮想境界を対象境界として、解いた解ベクトルを $(\mathbf{X}_{1s}^T \ \mathbf{X}_{2s}^T)^T$ とするとシステム方程式、式(49)は、式(50)となる。ここで $\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ となっているのは、仮想境界が解析領域全体を含むため、仮想境界上に入力が存在しないことを意味する。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1s} \\ \mathbf{X}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

回転方向成分と発散方向成分の平均をとり，開領域問題の解を求める．回転方向成分 \mathbf{E}_t と発散方向成分 \mathbf{D}_n の平均をとることで開領域問題の解を得る．開領域問題の解ベクトル $(\mathbf{X}_{10}^T \ \mathbf{X}_{20}^T)^T$ は，式(51)により求めることができる．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{10} \\ \mathbf{X}_{20} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1z} \\ \mathbf{X}_{2z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1s} \\ \mathbf{X}_{2s} \end{pmatrix} \right] \quad (51)$$

ここで $\mathbf{X}_{2z} = 0$ であることから，式(52)，(53)の関係を得る．

$$\mathbf{X}_{1s} = \mathbf{X}_{10} - C_{11}^{-1} C_{12} \mathbf{X}_{20} \quad (52)$$

$$\mathbf{X}_{2s} = 2\mathbf{X}_{20} \quad (53)$$

式(52)，(53)を式(50)に代入し，整理すると，開領域問題のシステム方程式は，式(54)となる．

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{10} \\ \mathbf{X}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

3.5 双対映像法における具体例

双対映像法は，電荷を映像として考慮することで開領域問題として解くことを可能にする．当然，入力ソースは電荷となる．図 17 は入力に均一電荷を想定し，解析した変位電流ベクトル分布を示す．三角形の分割個数は 1318 個である．

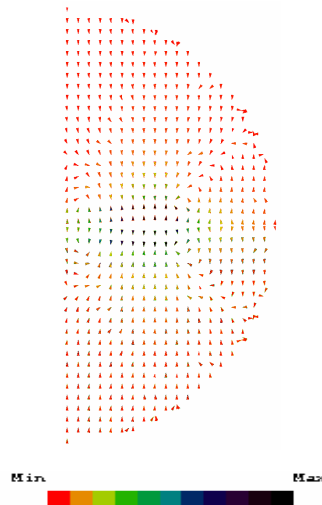


図 17 変位電流ベクトル分布

均一な電荷を入力としているため数値的に参照すると電極上の電圧は一定となっておらず, 図 17 は理想的な分布となっていない. 理想的な分布となるためには電荷入力から等電圧にする必要がある. そこで以下のような電極の電圧を一定とするシステム方程式を導出する.

$$\mathbf{CX} = \mathbf{F} \quad (55)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{C} : \text{システム行列} \\ \mathbf{X} : \text{解くべき電圧ベクトル} \\ \mathbf{F} : \text{入力電荷ベクトル} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{m-5} \\ X_{m-4} \\ X_{m-3} \\ X_{m-2} \\ X_{m-1} \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_{m-5} \\ X'_{m-4} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{X}' \quad (56)$$

X_1, X_2, \dots, X_m はもとのポテンシャルであり, この中で, $X_{m-5}, X_{m-4}, X_{m-3}, X_{m-2}, X_{m-1}$ が電圧 X'_{m-5} に等しいとする関係式が式(56)である. もとの座標における静電エネルギー W は式(57)であり, 変換後の静電エネルギーは式(58)である.

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (57)$$

$$W' = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{F}' = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{C}' \mathbf{X}' \quad (58)$$

式(57)と式(58)のエネルギーが等しいという条件は, 以下の式(59), 式(60)となる.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{S}^T \mathbf{F} \\ &= W' = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{F}' \Rightarrow \therefore \mathbf{F}' = \mathbf{S}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{X} = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{S}^T \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{X}' \\ &= W' = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{C}' \mathbf{X}' \Rightarrow \therefore \mathbf{C}' = \mathbf{S}^T \mathbf{C}\mathbf{S} \end{aligned} \quad (60)$$

よって式(59), (60)の関係から, 式(55)は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \mathbf{C}' \mathbf{X}' \\ \mathbf{S}^T \mathbf{F} &= (\mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S}) \mathbf{X}' \end{aligned} \tag{61}$$

と変形できる. 従って, 電極の部分だけの電圧 $X_{m-5}, X_{m-4}, X_{m-3}, X_{m-2}, X_{m-1}$ が電圧 X'_{m-5} に等しい場合のシステム方程式の解は式(61)から得られる.

$$\mathbf{X}' = \mathbf{C}'^{-1} \mathbf{F}' = (\mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{F}) \tag{62}$$

すなわち, 式(62)の電極部分が電圧一定とした解ベクトルを与える. もとの座標の電圧ベクトルは式(56)から得られる. 以降の双対映像法による電磁界解析はこの解ベクトルから算出され, 電極上は等電圧を保つ.

そして, 有限要素法などによる閉領域問題は解析する際に任意で領域を設定することから, 領域の範囲により解析結果が変わり, より一意的な値を導出できないという欠点があった. そこで本節では双対映像法を用いて一意的なポテンシャル分布が得られるかを吟味する. 電極形状や入力などの諸条件は変えずに領域半径だけを変えて解析し, ポテンシャル分布を比較した. 図 18 は一般的な平行板コンデンサを双対映像法により解析したポテンシャル分布である. 図中の緑線はコンデンサの電極を示し, 黄線と赤線は解析結果を示す. また, 黄線の領域に対して赤線は 2 倍の領域をとっている.

図 18 の解析結果から, ほぼ同一の結果がでた. よって双対映像法は原理的にも領域半径に依存しないが, これを解析結果からもそのことが証明できた. よって, 双対映像法は, 領域半径を含む範囲の仮想境界を設定すればよく, 計算時間を低減することができる. そしてより正確な結果を導出できるため, 閉領域問題として解析するよりも双対映像法による開領域問題で解析するほうが優れていることがわかる.

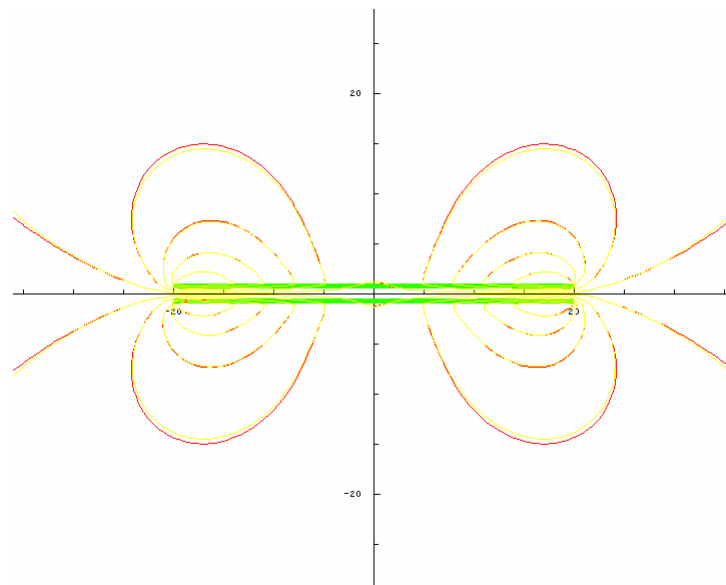


図 18 ポテンシャル分布

3.6 双対映像法による電界解析

第2章でも述べたが、端効果現象によりコンデンサ中の電流は電極の中央付近と端部では均一に流れない。さらにコンデンサの電極寸法は、同一容量とするためには、端効果を見逃した解析値と端効果を考慮した解析値を比較すると後者のほうが大きくなる。

具体的な変位電流の可視化例として、極めてポピュラーな形状で構成される平行板コンデンサの変位電流ベクトル分布を解析する。図19は平行板コンデンサとその周辺の領域を双対映像法から導かれる電氣的等価回路から得られた可視化変位電流ベクトル分布を示す。三角形の分割個数は1318個である。

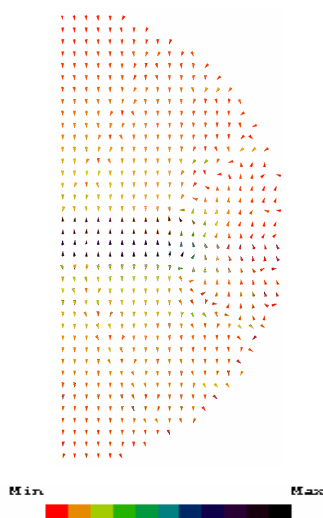


図19 変位電流ベクトル分布

図19から平行板コンデンサの電極間に流れている変位電流が均一に流れていないことが判り、端効果現象を確認できる。数値的な観点から比較しても、中央付近と端部の変位電流ではかなりの有意差がある。このことから平行板コンデンサがどの付近まで端効果の実質的影響を与えるかが判る。

3.7 コンデンサ形状の最適化

3.6の節では、平行板コンデンサの周辺も加味した変位電流分布を双対映像法により開領域問題として解析した。その結果、端効果現象を確認した。本節ではコンデンサの幾何学的形状を変えることによって端効果現象を削減する最適化を考える。

図20, 図21, 図22はそれぞれ電極の1/2領域(右側)を示し、電極間体積、電極面積ともに同じ値を持つ類似な電極形状を持つコンデンサである。この3種類のコンデンサを用いて、それぞれ変位電流分布、静電容量を比較し、端効果現象にどのように影響を及ぼすのか吟味する。



図 20 電極形状 パターン 1

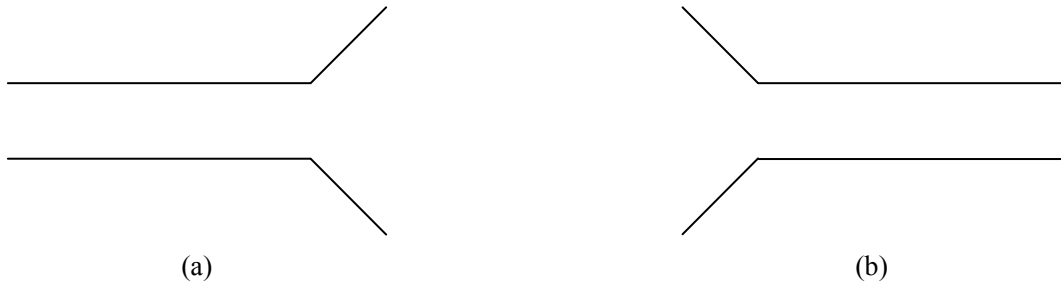


図 21 電極形状 パターン 2

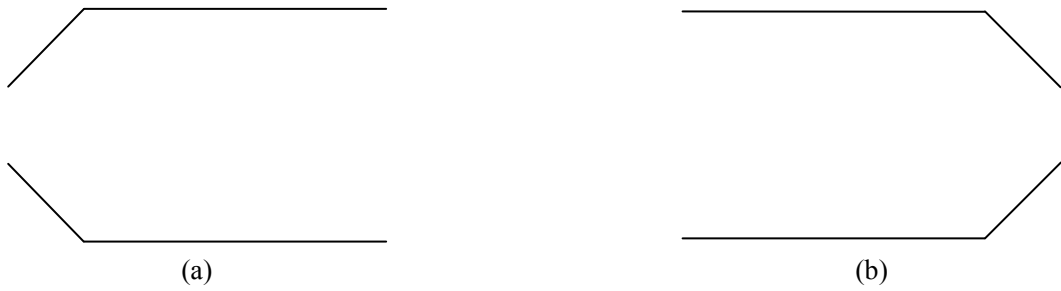


図 22 電極形状 パターン 3

図 23, 図 24, 図 25 は図 20, 図 21, 図 22 それぞれのコンデンサの電極形状を双対映像法により解析した変位電流ベクトル分布である. 表 1 はそれぞれの静電容量を示す.

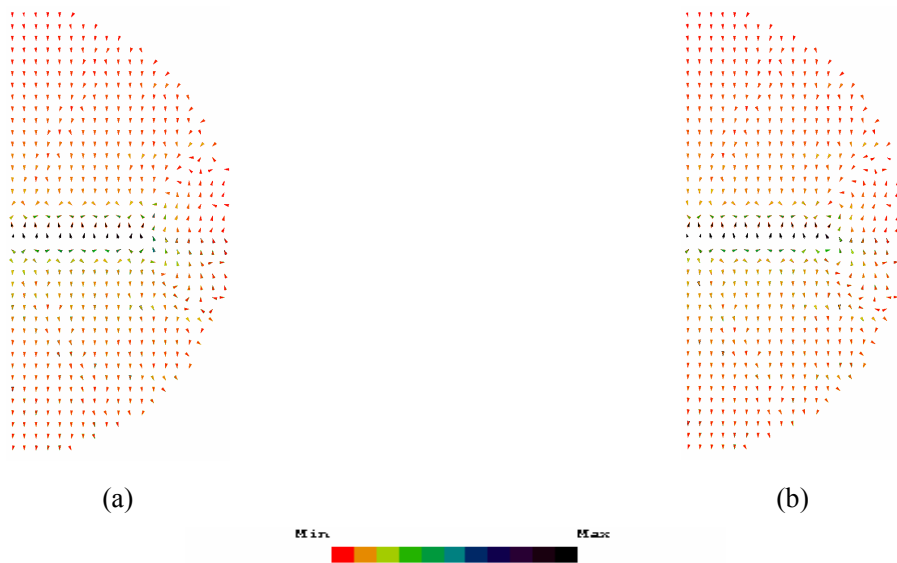


図 23 パターン 1 における変位電流ベクトル分布

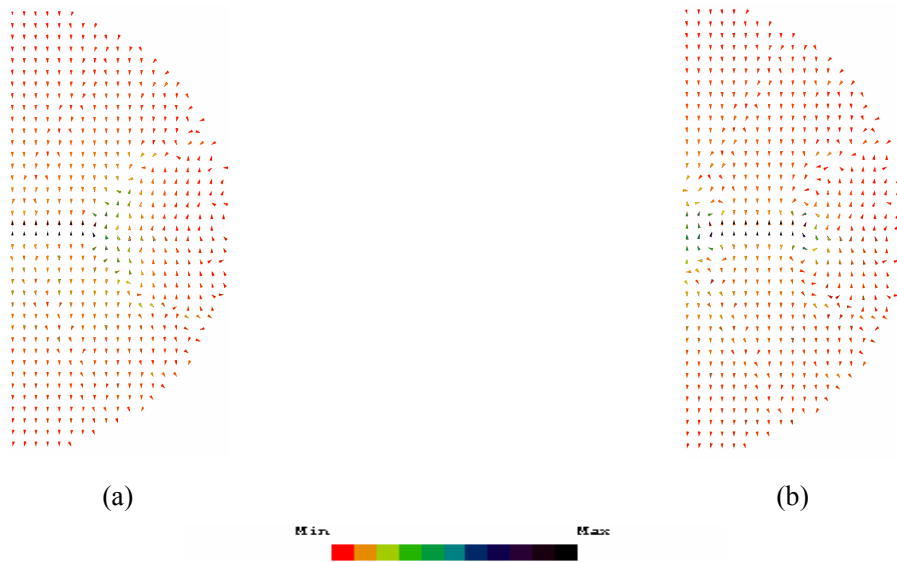


図 24 パターン 2 における変位電流ベクトル分布

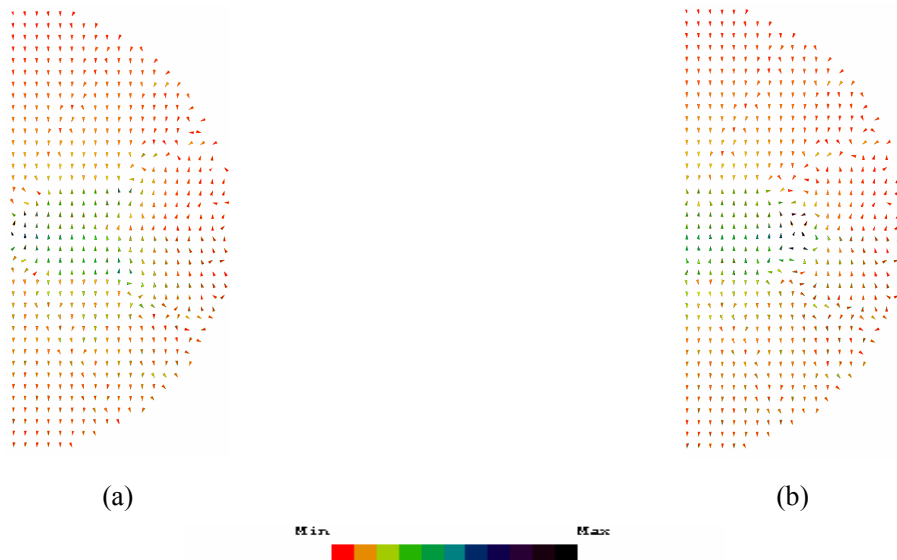


図 25 パターン 3 における変位電流ベクトル分布

表 1 静電容量

	(a) [pF]	(b) [pF]
パターン 1	299.3	310.1
パターン 2	251.2	284.7
パターン 3	119.2	155.0

表 1 の結果から、パターン 1, 2, 3 の全て(b)のコンデンサが(a)より大きな静電容量値をとることがわかる。(b)のコンデンサの共通している点は端(右側)が(a)のそれより閉じていることから、電極の端部が開いている方が電極間の距離、電極面積が同値でも端効果が顕著であることを意味する。また同様に電極間の距離、電極面積ともに同じ数値で他のケースについても解析してみたところ、同様な傾向がでていたことから、電極の端部が開くほど、また、電極の端部の体積が大きいほど端効果現象がより顕著に発生してしまう傾向があるといえる。

次に、図 26 のような電極形状が同じで電極間に存在する誘電体の誘電率が変化した場合について解析する。なお、いずれの場合も誘電体の体積は同一とし、コンデンサ全体の 1/2 領域(右側)を示している。以上の条件下で、変位電流分布、静電容量を比較し、端効果現象がどのように影響を及ぼすのか吟味する。

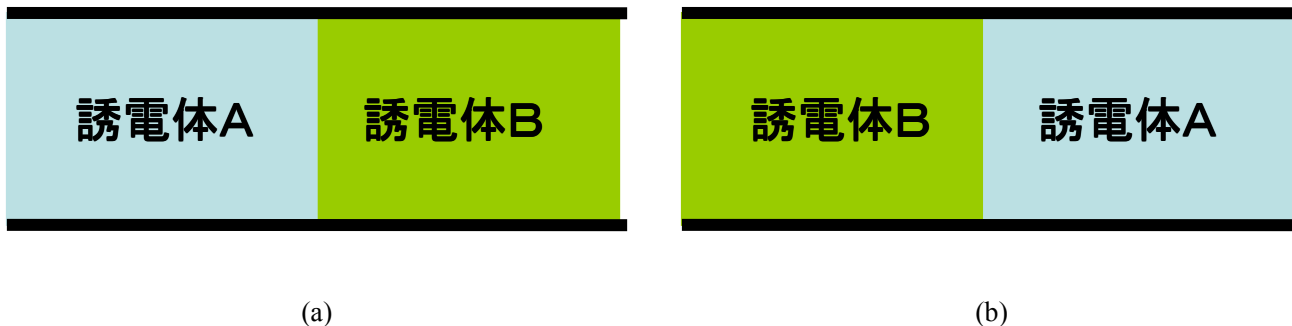


図 26 電極形状

図 27 は図 26 の 2 種類の電極を双対映像法により解析した変位電流ベクトル分布である。誘電体 A と誘電体 B の誘電率比は 1:2 としている。表 2 は誘電体 B の誘電率を変化させ、静電容量を算出した。パターン 1, 2, 3 はそれぞれ誘電体 A と誘電体 B の誘電率比が 1:2, 1:4, 1:10 であり、いずれも B の方が、誘電率を高く設定している。

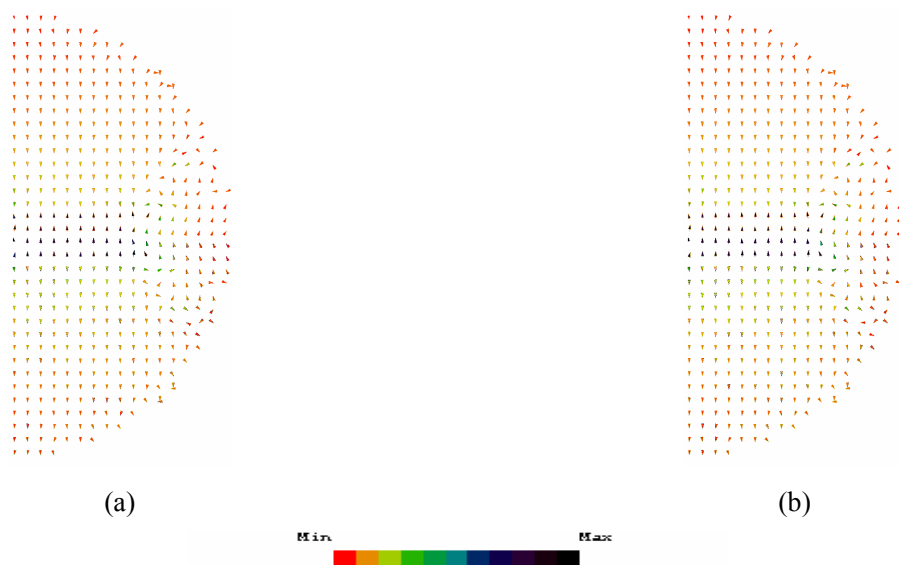


図 27 変位電流ベクトル分布

表 2 静電容量

	(a)	(b)
パターン 1	246.253(pF)	246.895(pF)
パターン 2	370.472(pF)	372.036(pF)
パターン 3	740.464(pF)	743.093(pF)

表 2 の結果, パターン 1, 2, 3 の全て(b)のコンデンサの方が大きな静電容量値をとることがわかる. すなわち, 端部(右側)に誘電率の高い誘電体を置くほど端効果が顕著となる. また, 図 26 以外の場合も吟味した結果, 同様の傾向が得られたことから, 端部に低い誘電率の誘電体を置くほど静電容量値は大きくなることがわかる. 電気回路問題において図 26 のようなコンデンサが組み込まれている回路を解く際に, 並列接続として考慮するのが一般的だが, 端効果を勘案すると妥当でないことがわかる.

第4章 結論

本論文では、主に有限要素法、等価回路法、双対映像法を駆使し、コンデンサに流れる変位電流を可視化し、コンデンサに於ける端効果を解析した。その結果、コンデンサの端効果を可能な限り削減し、小型大容量なコンデンサ設計の一方途を述べた。

具体的な本論文の手法を述べれば以下の通りである。等価回路法により汎関数から導きかかれたシステム方程式の係数をコンデンサの静電容量と見立て、等価回路を組むことで、より解析を簡易化できた。それによって同軸角型導体、平行板コンデンサの電磁界解析を行った。同軸角型導体の解析では、有限要素解によって算出した静電容量は解析地より大きな値を与えることが判明し、変位電流分布から角型導体の頂点に向かう変位電流が特異になることを明らかにした。平行板コンデンサの解析では変位電流分布を求めることで、端部に発生する端効果現象を可視化した。

コンデンサは通常、平行板的な形状で構成されるため、必ず開境界へ繋がる端部を持つ。開領域問題を有限要素法で解析するため、本論文では双対映像法を適用し、コンデンサの変位電流分布解析を行った。双対映像法は電磁気学の電気映像法を拡張したものであり、従来、閉領域問題しか解析を行えなかった有限要素法を、2つの閉領域問題へ置き換え、有限要素解を得る手法である。電界系問題に対する双対映像法は、電気映像として電荷を想定するため、通常は電荷入力を前提とするが、電圧の拘束条件を導入し、電圧入力の電界系双対映像解を得ることができた。

電極形状、誘電率などの諸条件を変化させて変位電流分布解析を行い、端効果削減を目指す形状や誘電体配置などの最適化を試みた。電極形状を変化させた場合、電極間距離、電極面積が同じ値とする条件下で解析を行った。その結果、電極の端部が広がるほど、また電極の端部の体積が大きくなるほど静電容量が低下し、端効果現象が顕著となることが判明した。誘電体の配置を変化させた場合、端部に誘電率の大きい誘電体を設置するほど、静電容量が低下し、端効果の影響を拡大することが判明した。

従来、端効果現象は電磁界解析において無視されるケースが多く、微小な影響といわれることがあった。しかし、本研究での解析の結果、精度の高い解析が要求される場合、端効果現象は無視できない現象であることを明らかにした。

付録 A 汎関数と三角形要素

ここでは, p.8, 2.3.3 汎関数と三角形要素の式の展開について補足する. 式(23)の $(\nabla a_1)^2, \nabla a_i, \nabla a_j$ について考
える.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \nabla a_1 &= \frac{1}{2\Delta} \{(y_2 - y_3)i + (x_3 - x_2)j\} \\ \nabla a_2 &= \frac{1}{2\Delta} \{(y_3 - y_1)i + (x_1 - x_3)j\} \\ \nabla a_3 &= \frac{1}{2\Delta} \{(y_1 - y_2)i + (x_2 - x_1)j\} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \nabla a_1 \cdot \nabla a_2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\} \\ \nabla a_2 \cdot \nabla a_3 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)\} \\ \nabla a_3 \cdot \nabla a_1 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)\} \\ (\nabla a_1)^2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2\} \\ (\nabla a_2)^2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2\} \\ (\nabla a_3)^2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2\} \end{aligned} \quad (65)$$

これらを面積分するわけだが, 式は x にも y にも依存しない. よって, 面積分は一次三角形要素の面積を乗じるだけになる.

$$\begin{aligned} \int_S \nabla a_1 \nabla a_2 ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\} \\ &= \frac{1}{4\Delta} (h_1 h_2 + w_1 w_2) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (h_1 h_2 + w_1 w_2) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cot \theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S \nabla a_2 \nabla a_3 ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (h_2 h_3 + w_2 w_3) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \cot \theta_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S \nabla a_3 \nabla a_1 ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (h_3 h_1 + w_3 w_1) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \cot \theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S (a_1)^2 ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (h_1^2 + w_1^2) \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\cot \theta_3 + \cot \theta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S (a_2)^2 ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (h_2^2 + w_2^2) \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\cot \theta_3 + \cot \theta_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S (a_3)^2 ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (h_3^2 + w_3^2) \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\cot \theta_1 + \cot \theta_2)
\end{aligned}$$

(66)

ここで、一次三角形要素の角度表現について説明する。

汎関数の第一項の S 行列の $\cot \theta_i$ の表現について導出方法を示す。ここでの注意は、各辺の長さは、必ず左回りに計算することである。各辺の長さとして一次三角形要素の各頂点の座標との対応を以下に示す。 h_3, w_2 については図 28 で負の値となるので図中ではマイナス表記をして正の値として扱うことにする。

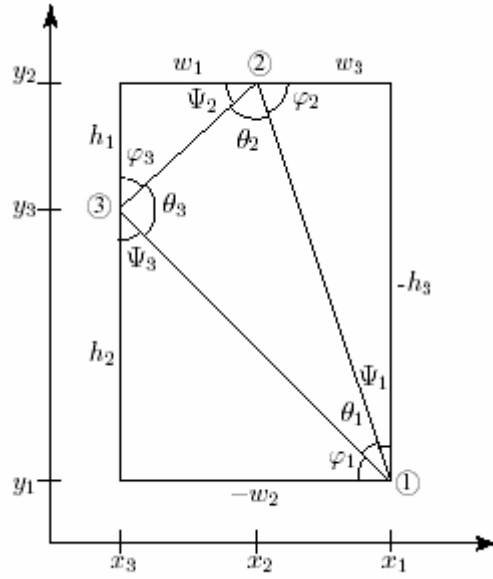


図 28 三角形要素と角度

$$\begin{pmatrix} h_1 = y_2 - y_3 & w_1 = x_2 - x_3 \\ h_2 = y_3 - y_1 & w_2 = x_3 - x_1 \\ h_3 = y_1 - y_2 & w_3 = x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cot \theta_1 &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 - \psi_1\right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 - \psi_1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 - \psi_1\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cos(\phi_1 + \psi_1) + \sin \frac{\pi}{2} \sin(\phi_1 + \psi_1)}{\sin \frac{\pi}{2} \cos(\phi_1 + \psi_1) - \cos \frac{\pi}{2} \sin(\phi_1 + \psi_1)} = \frac{\sin(\phi_1 + \psi_1)}{\cos(\phi_1 + \psi_1)} \\ &= \frac{\sin \phi_1 \cos \psi_1 + \cos \phi_1 \sin \psi_1}{\cos \phi_1 \cos \psi_1 - \sin \phi_1 \sin \psi_1} = \frac{\frac{\sin \phi_1 \cos \psi_1}{\cos \phi_1 \cos \psi_1} + \frac{\cos \phi_1 \sin \psi_1}{\cos \phi_1 \cos \psi_1}}{\frac{\cos \phi_1 \cos \psi_1}{\cos \phi_1 \cos \psi_1} - \frac{\sin \phi_1 \sin \psi_1}{\cos \phi_1 \cos \psi_1}} \\ &= \frac{\tan \phi_1 + \tan \psi_1}{1 - \tan \phi_1 \tan \psi_1} = \frac{\frac{h_2}{-w_2} + \frac{w_3}{-h_3}}{1 - \frac{h_2}{-w_2} \frac{w_3}{-h_3}} = \frac{-h_2 h_3 - w_2 w_3}{w_2 h_3 - h_2 w_3} = -\frac{1}{2\Delta} (h_2 h_3 + w_2 w_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot \theta_2 &= \cot(\pi - \phi_2 - \psi_2) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 - \psi_2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2 - \psi_2\right)} = \frac{\cos \pi \cos(\phi_2 + \psi_2) + \sin \pi \sin(\phi_2 + \psi_2)}{\sin \pi \cos(\phi_2 + \psi_2) - \cos \pi \sin(\phi_2 + \psi_2)} \\ &= \frac{-\cos(\phi_2 + \psi_2)}{\sin(\phi_2 + \psi_2)} = -\frac{\cos \phi_2 \cos \psi_2 - \sin \phi_2 \sin \psi_2}{\sin \phi_2 \cos \psi_2 + \cos \phi_2 \sin \psi_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos \phi_2 \cos \psi_2 + \sin \phi_2 \sin \psi_2}{\cos \phi_2 \cos \psi_2} + \frac{\sin \phi_2 \sin \psi_2}{\cos \phi_2 \cos \psi_2} = \frac{1 - \tan \phi_2 \tan \psi_2}{\tan \phi_2 + \tan \psi_2} \\
& = -\frac{\sin \phi_2 \cos \psi_2}{\cos \phi_2 \cos \psi_2} - \frac{\cos \phi_2 \sin \psi_2}{\cos \phi_2 \cos \psi_2} \\
& = -\frac{1 - \frac{h_3}{w_3} \frac{h_1}{w_1}}{-\frac{h_3}{w_3} + \frac{h_1}{w_1}} = -\frac{h_1 h_3 + w_1 w_3}{h_1 w_3 - h_3 w_1} = -\frac{1}{2\Delta} (h_1 h_3 + w_1 w_3)
\end{aligned}$$

$$\cot \theta_3 = \cot(\pi - \phi_3 - \psi_3)$$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{1 - \tan \phi_3 \tan \psi_3}{\tan \phi_3 + \tan \psi_3} = -\frac{1 - \frac{h_1}{w_1} \frac{h_2}{w_2}}{\frac{w_1}{h_1} + \frac{w_2}{h_2}} \\
& = -\frac{h_1 h_2 + w_1 w_2}{h_2 w_1 - h_1 w_2} \\
& = -\frac{1}{2\Delta} (h_1 h_2 + w_1 w_2)
\end{aligned}$$

付録 B 双対映像法のシステム方程式

ここでは p.21, 3.4 システム方程式で導入した式(48)の要素 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ について説明する. 双対映像法で計算するとき解析領域が図 29 のように分割されたとする. このときの連立方程式 $\mathbf{SU}=\mathbf{F}$ が式(67)であるとする[5].

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{81} & \cdots & S_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_8 \end{pmatrix} \quad (67)$$

接点 1, 2, 3 がゼロ境界の固定境界条件であるなら, 図 29 の各接点は, 次のように分類することができる.

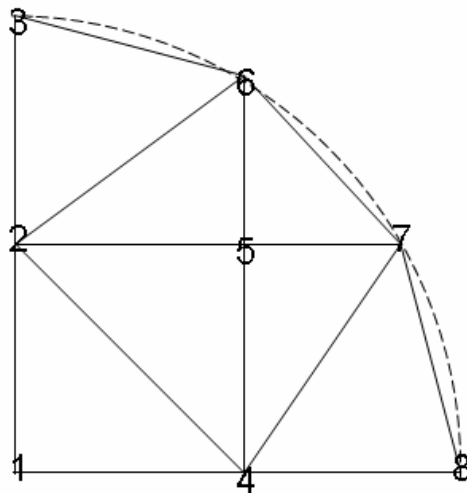


図 29 対映像法での接点

固定境界の接点番号	1, 2, 3
仮想境界内部の接点番号	1, 2, 4, 5
仮想境界上の接点番号	3, 6, 7, 8

まず, 式(67)の固定境界接点 1, 2, 3 に関する要素を取り除く.

$$\begin{pmatrix} S_{44} & \cdots & S_{48} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{84} & \cdots & S_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ \vdots \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 \\ \vdots \\ F_8 \end{pmatrix} \quad (68)$$

式(68)から $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ は以下のようになる.

$$C_{11} = \begin{pmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{54} & S_{55} \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} S_{46} & S_{47} & S_{48} \\ S_{56} & S_{57} & S_{58} \end{pmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} S_{64} & S_{65} \\ S_{74} & S_{75} \\ S_{84} & S_{85} \end{pmatrix}, \quad C_{22} = \begin{pmatrix} S_{66} & S_{67} & S_{68} \\ S_{76} & S_{77} & S_{78} \\ S_{86} & S_{87} & S_{88} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}$$

参考文献

- [1] <http://www.jri-sol.co.jp/field/service/package.html>
- [2] Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano, "The Strategic Dual Image Method:An extremely simple procedure for open field problems, " J. Appl. Phys. 63(8) 15 April 1988
- [3] 星野賢治, 齋藤兆古, "端効果の可視化によるコンデンサ形状の最適化" MAGDA 第 15 回, pp.83-87 , 2006.
- [4] Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano, "Finite Element Solution of Open Boundary Magnetic Field Problems, " IEEE Trans. MAG-23 No.5, September 1987.
- [5] 遠藤久, 齋藤兆古 : 平面型変圧器の磁界解析 1998 年度法政大学卒業論文

研究業績

2006年7月 第34回 可視化情報シンポジウム

星野賢治, 堀井清之, 斎藤兆古:「コンデンサ中を流れる変位電流の可視化」, 可視化情報, Vol.26, No.1, pp.275-278, 2006

2006年11月 第15回 MAGDA コンファレンス in 桐生

星野賢治, 斎藤兆古:「端効果の可視化によるコンデンサ形状の最適化」, 電磁現象及び電磁力に関するコンファレンス講演論文集, pp.83-87

2006年度 法政大学計算科学研究センター

星野賢治, 斎藤兆古:「コンデンサ中を流れる変位電流の可視化」, 法政大学計算科学センター報告論文

2007年7月 第35回 可視化情報シンポジウム

星野賢治, 堀井清之, 斎藤兆古:「コンデンサ中に流れる変位電流の可視化法」, 可視化情報学会誌, No.1, pp63-66

2007年度 法政大学計算科学研究センター

星野賢治, 斎藤兆古:「コンデンサ中に流れる変位電流の可視化法」, 法政大学計算科学センター報告論文

謝辞

本研究を進めるにあたって、多くの助言とご指導を頂いた齋藤兆古先生、
多くの協力を頂いた齋藤兆古研究室の皆様に心より感謝いたします。