

Voronoi-Delaunay変換による電磁界の高速計算

法政大学

○齊藤兆古¹⁾, 池口修一²⁾, 早野誠治³⁾

Faster electromagnetic field computation using the Voronoi-Delaunay transformation

Yoshifuru SAITO, Shuichi Ikeguchi, Seiji Hayano
Hosei University

Previously, we have proposed a locally orthogonal discretization method. This method is based on a geometrical duality between the Voronoi polygons and Delaunay triangles so that only one type of potential is required to implement the dual energy approach. Thereby, both of the improved functionals as well as local solutions can be obtained by the dual energy approach.

In this paper, we propose a Voronoi-Delaunay transformation method to implement the dual energy approach. The Voronoi-Delaunay transformation method makes possible to obtain the dual energy solution in a single computation, i.e. the energy minimum solution can be obtained by transforming the energy maximum solution. Thus, it is revealed that the electromagnetic fields can be computed in an ultimate efficient manner. Some examples demonstrate how highly accurate electromagnetic fields can be computed from a small system by our Voronoi-Delaunay transformation method.

1. まえがき

ディジタル計算機の広汎な普及と共に、有限要素法を中心とする数値解析技術の急速な進歩が促され、電気・磁気装置の設計・解析にも広く活用されるようになっていく。従来の設計・解析法に比較して、ディジタル計算機を前提とする数値解析法は、解析解の望めない非線形性まで考慮した精密な解析を可能とする点に大きな違いが見られる。

通常、有限要素法でより精密な結果を得ようとする場合、必然的に巨大なシステム方程式を解くことに帰し、結果として大型計算機やスーパーコンピュータ等の機器を活用しなければならない。このことから、Penman等を中心とするグループによって、双反変分原理を活用する方法が電磁界系に対して提唱された。^{1), 2)} 有限要素法がエネルギー最小原理に基づくため常に解の上限を与えるのに対し双反変分原理に基づく有限要素法は常に解の下限を与える。従って、両者の解の平均は誤差が打ち消し合うために、個々のシステム方程式は小規模であっても、より精度の高い解が得られる。これが通常Dual Energy Finite Element Methodの原理である。しかし、エネルギー最小系(Primal Systemと呼ぶ)とエネルギー最大系(Complementary Systemと呼ぶ)とで異なった種類のポテンシャルを使うため、従来のDual Energy Finite Element Methodでは、精度の高いEnergy Functionalを得ることができてもフィールド分布を表すポテンシャルの精度まで向上させることができない。この欠点が、Dual Energy Finite Element Methodの普及を妨げている大きな要因の一つと考えられる。

筆者等は、従来のDual Energy Finite Element Methodの欠点を補う、Voronoi-Delaunay線図の幾何学的双対性を利用したDual Energy Finite Element Methodを提唱してきた。^{3), 4)} このVoronoi-Delaunay線図に基づくDual Energy Methodは、Primal系とComplementary系に同一のポテンシャルを使うため、高精度のEnergy Functionalのみならず高精度のポテンシャルをも得ることを可能にした。

本稿では、二次元の磁界系を中心としてPrimal系とComplementary系の両方のシステム方程式を解く必要なく、Complementary系(Voronoi系)の解からPrimal系(Delaunay系)の解が与えられることを示し、Dual Energy Methodが一システム方程式で実行できることから、従来の有限要素法に比較して一桁程度小さいシステムで同等の結果が得られることを示す。

2. Voronoi-Delaunay変換法

2. 1. 基礎方程式

二次元の $x-y$ 平面で、動的磁界系の問題の多くは次の方程式を解くことに帰する。

⁽¹⁾電気工学科 教授 ⁽²⁾大学院修士課程 ⁽³⁾電気工学科 助手
〒184 東京都小金井市梶野町 3-7-2 電話 0423-81-5341

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -J_s \quad (1)$$

ここで、 A 、 J_s 、 μ 、 σ はそれぞれベクトルポテンシャル A の z 成分、 z -方向の入力電流密度、透磁率さらに導電率である。ベクトルポテンシャル A は、磁束密度 B と次式で関係づけられる。

$$\nabla \times A = B \quad (2)$$

従って、電界 E は次式で与えられる。

$$E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3)$$

(3)式のスカラーポテンシャル ϕ と時間微分の項で、電流密度 J_s と渦電流密度 J_e の間に次の関係が成り立つ。

$$J_s = -\sigma \nabla \phi \quad (4)$$

$$J_e = \sigma (\partial A / \partial t) \quad (5)$$

2. 2. Voronoi-Delaunay線図

第1図に示すように、空間に節点が与えられたとき、各節点到空間を割り振ると各節点を取り囲む多角形が形成される。この多角形をVoronoiの多角形と言う。Voronoiの多角形の各辺の垂線で各節点間を結ぶと三角形のメッシュが形成される。この三角形をDelaunayの三角形と言う。Voronoiの多角形の辺はDelaunayの三角形の辺の垂直二等分線となり、またVoronoiの多角形の頂点はDelaunayの三角形の外心に位置する。従って、Delaunayの三角形が与えられた場合、Delaunayの三角形の外心を結ぶことによってVoronoiの多角形が形成される。いま、Voronoiの多角形の二頂点とDelaunay三角形の二頂点からなる四辺形を一要素として考えたとき、第1図中に示してあるように常に局所直交座標系が形成される。Voronoi-Delaunay線図におけるこの局所直交性を利用して、Voronoi系とDelaunay系を独立に定式化する方法がVoronoi-Delaunay離散化法である。Delaunay系またはVoronoi系のどちらか一方のメッシュが決定したとき、他方のメッシュが自動的に決定される性質がDelaunay系とVoronoi系の幾何学的双対性である。

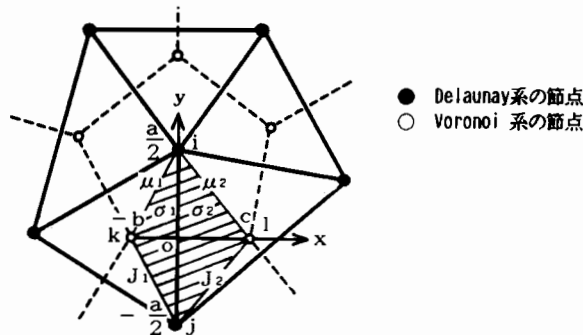
2. 3. 局所直交性

第1図の局所直交座標系で、節点 i 、 j 、 k 、 l に対して次の補間関数

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \quad (6)$$

を仮定すると(7)式の関係が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \\ A_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a/2 & 0 \\ 1 & 0 & -a/2 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$



第1図. Voronoi-Delaunay線図と局所直交座標系。

(7) 式の右辺の行列式の値は零であるから、係数 a_0, a_1, a_2, a_3 をユニークに決定できない。従って、 y 軸方向 (Delaunay系) と x 軸方向 (Voronoi系) でそれぞれ独立な補間関数を仮定しなければならない。いま、透磁率 μ と導電率 σ が個々のDelaunayの三角形で一定の値を持つと仮定すれば、隣接するDelaunayの三角形の境界で磁束密度の垂直成分 $B_x = \partial A / \partial y$ を連続とする補間関数は

$$A_D = (1/2) (A_i + A_j) + (A_i - A_j) (y/a), \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 a は節点 i, j 間の距離である。他方、Voronoi 系の補間関数は、透磁率 μ が各Delaunay の三角形で一定の値を取るから、隣接する Delaunay の三角形の境界で、磁界の平行成分 $H_y = -(1/\mu) \partial A / \partial x$ を共通としなければならない。この境界条件を満足するVoronoi系の補間関数は、

$$A_V = \left\{ \frac{c}{\mu_1} A_k + \frac{b}{\mu_2} A_l + \frac{1}{\mu_2} (A_l - A_k) x \right\} / \left\{ \frac{c}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2} \right\}, \quad -b \leq x \leq 0 \quad (9a)$$

$$A_V = \left\{ \frac{c}{\mu_1} A_k + \frac{b}{\mu_2} A_l + \frac{1}{\mu_1} (A_l - A_k) x \right\} / \left\{ \frac{c}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2} \right\}, \quad 0 \leq x \leq c \quad (9b)$$

で与えられる。ここで、 b と c は第1図に示してあるように x 軸方向の距離である。

第1図の局所直交座標系では、 x, y 軸方向で独立な補間関数に分離せざるを得ないため、(1) 式の支配方程式も x, y 成分の式に分離できると仮定する。すなわち、

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \left[\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - J_s \right], \quad (10a)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - J_s \right], \quad (10b)$$

2. 4. Functionalとシステム方程式

隣接する Delaunay の三角形で境界に垂直な方向の磁束密度 $B_x = \partial A_D / \partial y$ を共通とするDelaunay系のFunctional $F(A_D)$ は、

$$F(A_D) = \iint \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_D}{\partial y} \right)^2 + \int \left[\sigma \left(\frac{\partial A_D}{\partial t} \right) - J_s \right] A_D \right\} dx dy, \quad (11)$$

で与えられる。(8) 式の補間関数を(11)式に代入し、節点 i, j, k, l で囲まれる面積について積分するとDelaunay系のFunctionalが得られる。このfunctional $F(A_D)$ の極値を取ることによってDelaunay系の節点方程式が得られる。例えば、第1図の節点 i に対する節点方程式は、

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \frac{b}{a} + \frac{1}{\mu_2} \frac{c}{a} \right) (A_i - A_j) + \frac{a}{4} (b\sigma_1 + c\sigma_2) \frac{\partial}{\partial t} (7A_i + 5A_j) = \frac{a}{4} (bJ_1 + cJ_2), \quad (12)$$

となる。よって、全体のDelaunay系のシステム方程式は、

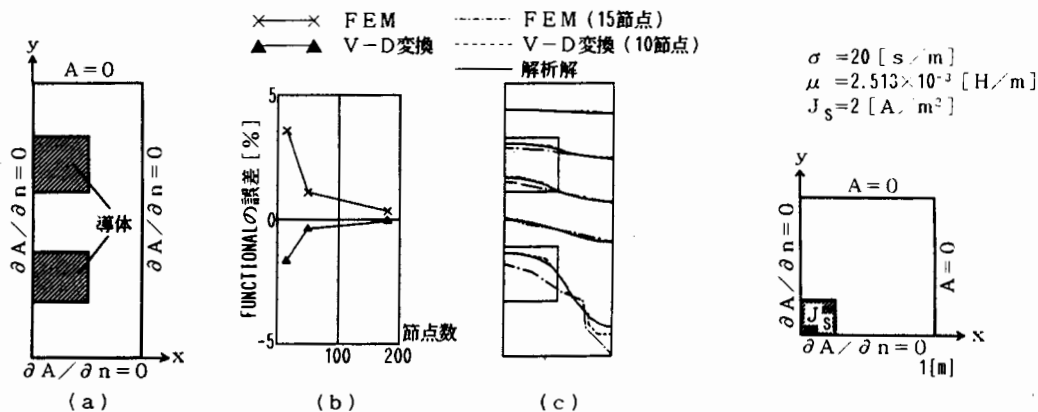
$$D_D \bar{\Phi}_D + E_D (d/dt) \bar{\Phi}_D = \bar{F}_D, \quad (13)$$

と書ける。ここで、 D_D, E_D はそれぞれ(12)式の左辺第1項と第2項に対応する係数行列であり、 \bar{F}_D は(12)式の右辺の入力電流に対応するベクトルであり、さらに $\bar{\Phi}_D$ はDelaunay系のポテンシャルベクトルである。

他方、隣接するDelaunayの三角形間で境界に平行な方向の磁界 $H_y = -(1/\mu) \partial A_V / \partial x$ を共通とするVoronoi系のFunctional $G(A_V)$ は、

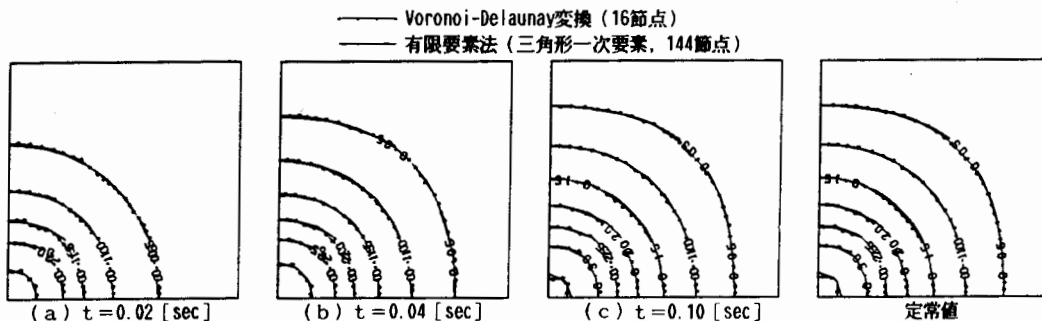
$$G(A_V) = - \iint \left\{ \mu \left(\frac{\partial A_V}{\partial x} \right)^2 + \left[\sigma \left(\frac{\partial A_V}{\partial t} \right) - J_s \right] A_V \right\} dx dy, \quad (14)$$

で与えられる。ここで $\hat{}$ は規定された値を示す。(9a), (9b) 式の補間関数を(14)式に代入し、節点 i, j, k, l で囲まれる面積について積分するとVoronoi系のFunctionalが得られる。このfunctional $G(A_V)$ の極値を取ることによってVoronoi系の節点方程式が得られる。例えば、第1図の節点 k に対する



第3図. (a) スロット中の磁界分布解析モデル. (b) Functionalの収束性. (c) スロット中のポテンシャル分布.

第4図. フェライト角形導体の解析モデル.



第5図. フェライト角形導体のステップ応答. 時間刻み幅 $\Delta t = 0.01$ [sec]

3. 結 言

本稿では、筆者等の提唱するVoronoi-Delaunay変換法が、従来の三角形一次要素を使った有限要素法よりも桁程度少ないシステム方程式で同等の結果が得られることを、二次元の磁界系を中心として示した。Voronoi-Delaunay変換法は、スカラーポテンシャル問題や導波管の動作モード解析にも同様に適用できることを付記しておく。^[5,6]

参考文献

- [1] J.Penman, et al., "Complementary and dual energy finite element principles in magnetostatics," IEEE Trans. Magn., Vol. MAG-18, No.2, pp.319, (1982).
- [2] P.Hammond, et al., "Dual finite element calculations for static electric and magnetic fields," Proc. IEE, Pt. A, Vol.130, No.3, pp.105, (1983).
- [3] Y.Saito, et al., "Faster magnetic field computation using locally orthogonal discretization," IEEE Trans. Magn., Vol. MAG-22, No.5, pp.1057, (1986).
- [4] Y.Saito, et al., "Modeling of magnetization characteristics and faster magnetodynamic field computation," J. Appl. Phys., 63(8), pp.3174, (1988).
- [5] Y.Saito, et al., "An efficient method for higher order waveguide modes," IEEE Trans. Magn., to be appeared.
- [6] 池口 修一, 他, "Voronoi-Delaunay離散化法による電磁界計 — Voronoi-Delaunay相互変換 —," 電気学会マグネティックス研究会資料, Vol. MAG-88-148, (1988年 8月 4日).