

# 有限要素法に基づく磁気回路解析法

— 準三次元問題への拡張 —

藪並 隼人\*、早野 誠治、斎藤 兆古 (法政大学)

Magnetic Circuit Analysis based on the Finite Elements  
-Generalization to the Quasi-Three-Dimensional Problem-

Hayato Yabunami\*, Seiji Hayano, Yoshifuru Saito (Hosei University)

## Abstract

As is well known, conventional magnetic circuit theory makes it possible to analyze the three-dimensional magnetic fields, even though its theoretical background is based on the engineering experiences and its accuracy essentially depends on the assumed magnetic circuits. On the other side, because of the widely spreading use of the digital computers, most of the magnetic field analysis is being carried out by finite elements. The finite elements have a firm theoretical background but it is too expensive to implement the three-dimensional analysis. In order to carry out the three-dimensional magnetic field analysis in a most efficient manner, we propose the theory of modern magnetic circuits (TMMC, in short) based on finite elements discretization. This makes it possible to implement the three-dimensional magnetic field computation in a quite efficient manner similar to those of the conventional magnetic circuit theory. In the present paper, we generalize the two-dimensional theory of modern magnetic circuits to the quasi-three-dimensional magnetic circuits. A simple example demonstrates not only the usefulness but also validity of our new methodology.

キーワード：有限要素法、磁気回路法、準三次元的な磁気回路、リーマン積分  
(finite elements, magnetic circuit theory, quasi-three-dimensional magnetic circuits, Riemann integral)

## 1. はじめに

近年のデジタル計算機の高性能化と小型化、ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらし、いわゆる、デジタル計算機がパーソナルコンピュータ (Personal Computer, 以下、PC と略記) と呼ばれる高級・多機能文房具として使われるようになった。このため、有限要素法や境界要素法で代表される電磁界の数値解析は、PC で実行可能な環境になり、この意味で、既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている [1, 2]。

しかしながら、現実問題として、汎用パッケージで実用的な電磁機器の解析が容易に行え、その結果が実際の設計へ反映されているであろうか？ 答えは否である。実際は、極めて単純な例を除き、定性的な電磁界分布の傾向を把握する程度の実用性しか期待できない。この理由は大きく二つの問題点へ集約できるであろう。最初は、現実の電磁機器は必ず三次元的形状をもつことに起因する。いかに強力な計算能力をもつに至った PC であっても、三次元の電磁界解析を厳密に可能とするほど強力ではない。次は、材料特性のモデルに起因する。従来の解析的な計算では不可能であった解析が数値解析で可能になったとは言え、材料の構成方程式が未知である限り実際の電磁機器の厳密な電磁界解析は不可能である。

これは、数値解析技術の開発が材料の特性を勘案する余裕が無く、または解析上都合の良い特性だけ勘案して行わ

れた結果であり、現時点での数値解析技術の直面する最大の課題である。すなわち、古典的な解析や現代の解析においても、材料の特性を導入する最も現実的な課題を避けた側面は否めない。逆にどのように材料の構成方程式を定式化するか、そして、どのように構成方程式を解析へ導入するかなどの問題点が正攻法で解決されていない。

以上の問題点を踏まえ、実際の電磁機器の電磁界解析を行う方法は以下に示す二方法が考えられる。

第一は磁気回路法である。古典的な磁界分布解析の工学的近似手法である磁気回路法は、平均的であれ、現実の非線形磁気装置の解析を可能とし、装置の設計に寄与している [3, 4]。磁気回路法は、技術者の経験的要素に基づくため、その数学的根拠に疑問の余地がある。しかし、実用的な結果を与える現実的方法である。第二は有限要素法に代表される数値解析法である。有限要素法などの数値解析法は、数学的根拠が明確である反面、現実の設計に生かされにくい側面をもつ。

本論文は、このような現状を踏まえ、有限要素法と古典的磁気回路法の接点を見出し、数学的背景が明確な磁気回路法を確立する一方途を議論するものである。具体的には、有限要素法では容易に解析可能な問題である反面、従来の磁気回路法ではモデル化が困難な例題を通して、有限要素法と磁気回路法の接点を見出し、磁気回路法で使われる技術者の経験的要素を有限要素法へ導入して、実用的な電磁機器の設計へ寄与できる現代磁気回路理論を提案する。

## 2. 現代磁気回路理論

### 2.1. 有限要素法による二次元静磁界解析

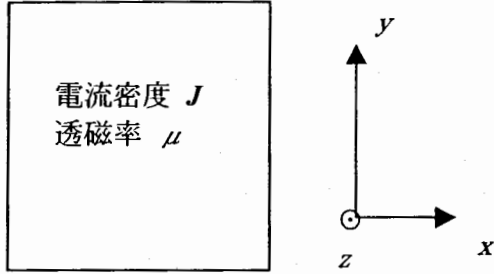


図1. 角型強磁性体 (断面図)

具体的な例題として、図1に示す無限に長い角型強磁性体の $z$ 軸方向へ均一電流が流れている場合、角型強磁性体の二次元断面上の磁界分布解析を取り上げる。

図1の例題では、電流密度 $J$ は $z$ 軸方向成分のみであり、 $x$ - $y$ 断面方向は存在せず、さらに、平面方向すなわち、 $x$ ,  $y$ の関数で表現される。よって、この問題の支配方程式は(1)式で与えられるポアソン方程式となる。

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J \quad (1)$$

仮に、このベクトルポテンシャル $A$ が細分化された要素の中で近似的に

$$A^* = f(x, y) \quad (2)$$

で与えられるとすれば、(3)式の汎関数を最小にすることで有限要素解が得られる[1, 2]。

$$F(A^*) = \frac{1}{2} \int_s (\nabla A^*)^2 ds - \int_s J A^* ds \quad (3)$$

いま、図1の角型強磁性体の断面が微小な三角形の集合に分割され、図2に示す任意の三角形の要素内で近似ベクトルポテンシャルが(4)式の $x$ ,  $y$ の1次関数で表現されると仮定する。すなわち、三角形1次有限要素法で解くことを考える。

$$A^* = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (4)$$

ここで、 $a_0, a_1, a_2$ は三角形の頂点に位置するベクトルポテンシャルから決まる定数である。

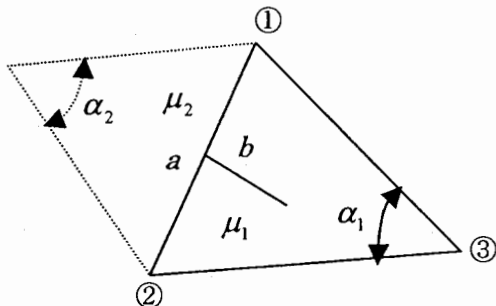


図2. 三角形1次有限要素法

図2に示す三角形の断面積を $S_1$ とすれば、(3)、(4)式から導かれる節点①②間の幾何学的形状と媒質のパラメータ $\mu$ から決まる定数 $G_{1,2}$ は(5)式で与えられる。

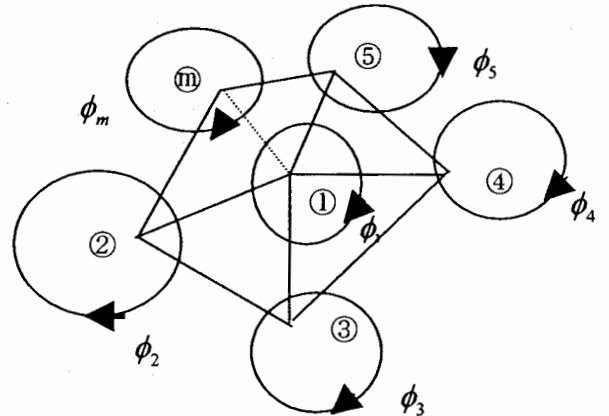
$$G_{1,2} = \frac{1}{2\mu_1} \cot \alpha_1 \quad (5)$$

さらに、図2の節点①②間の長さを $a$ 、節点①②③からなる三角形の外心から辺 $a$ に下ろした垂線の長さを $b$ とすれば(5)式は、

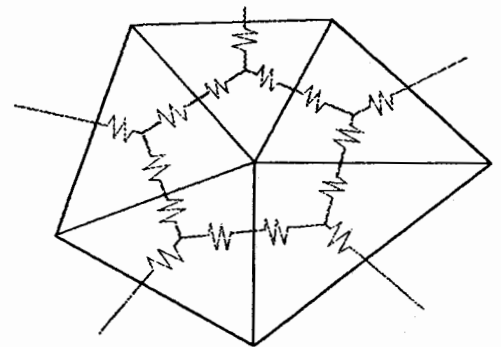
$$G_{1,2} = \frac{1}{2\mu_1} \cot \alpha_1 = \frac{1}{2\mu_1} \left( \frac{b}{\frac{a}{2}} \right) = \frac{b}{\mu_1 a}$$

と変形される。

### 2.2. 磁気回路



(a) 三角形1次有限要素法による磁束経路



(b) 古典的磁気回路法による磁気回路

図3. 有限要素法と古典的磁気回路法のメッシュシステム

図3(b)は、図3(a)に示す有限要素法の離散化したメッシュを磁気回路で表現したものである。有限要素法は、図3(a)に示すように各節点に電流が均等に振り分けられているものとして、それぞれの節点に対する磁束のループ方程式を解くことにより、各節点ポテンシャルを求めることを意味する。図3(a)のループ磁束モデルを具体的な磁気回路で表現した図3(b)における磁気抵抗を有限要素法から導く。

節点①と②のベクトルポテンシャルをそれぞれ、 $A_1, A_2$  とすれば、図2の三角形中で、節点①と②のベクトルポテンシャルと(5)、(6)式の幾何学的形状と媒質のパラメータ  $\mu$  から決まるパラメータは、1 を  $z$  方向の単位長さとして、(7)式で関係付けられる。

$$\begin{aligned} G_{1,2}(A_1 - A_2) &= \frac{b}{\mu_1 a}(A_1 - A_2) \\ &= \frac{b}{\mu_1 a}(A_1 - A_2) = R_{1,2}(\phi_1 - \phi_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\phi_1 = A_1 \cdot 1,$$

$$\phi_2 = A_2 \cdot 1,$$

$$R_{1,2} = \frac{b}{\mu_1 a \cdot 1}$$

節点①が  $m$  個の面積  $S_1, S_2, \dots, S_m$  をもつ三角形で取り囲まれ、節点①へ繋がる線分を持つ節点を②, ③,  $\dots$ , ⑩とすれば、三角形1次要素を用いた有限要素法は節点①に対して(8)式を与える。

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m S_i J_i = \sum_{i=1}^m R_{1,i}(\phi_1 - \phi_i) \quad (8)$$

従って、(8)式の物理的意味は図3(b)に示すように磁気回路方程式そのものに他ならない。すなわち、古典的磁気回路方程式が三角形1次要素を用いた有限要素法から導かれる。

### 2.3. 境界条件

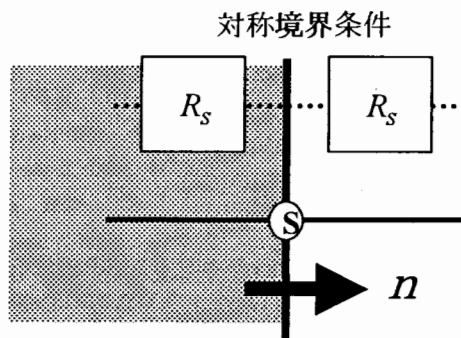


図4. 対称境界条件

古典的磁気回路で境界条件の取り扱いが明確でない。ここでは、有限要素法の境界条件から古典的磁気回路の境界条件を明確にしておこう。

偏微分方程式の境界条件は2種類ある。一方は固定境界条件であり、境界のベクトルポテンシャルを

$$A = \text{Const.} \quad (9)$$

と一定値にする条件である。これは、磁気回路では、境界の磁束を

$$\phi = \text{Const.} \quad (10)$$

に設定することを意味する。

他方の境界条件は対称境界条件と呼ばれ、境界に対する法線方向の単位ベクトルを  $n$  とすれば、

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad (11)$$

となる条件であり、有限要素法では(3)式の汎関数を最小にする条件で自動的に満足される。磁気回路で考えれば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

となり、法線方向への磁束の変化が無いことを意味する。換言すれば、図4に示すように対称境界に接する節点⑤のシステム方程式で、問題領域とする左側の磁気抵抗  $R_s$  のみを勘案すれば良い[5]。

## 3. 準三次元的な磁気回路

### 3.1. キーアイデア

図5の左図に示す立方体形状において、水平方向に通る磁束は、図5の右図に示すように二次元の平行面のスライスに分割した形状の磁気抵抗を考えることにより、容易に計算することができる。これは最も簡単な場合であるが、この考え方を一般化し、本論文で提唱する有限要素法に基づく現代磁気回路理論は準三次元的な磁気回路へ一般化することができるのは明らかである。

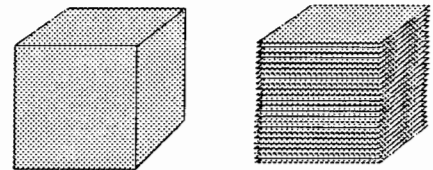


図5. 立方体形状の細分化

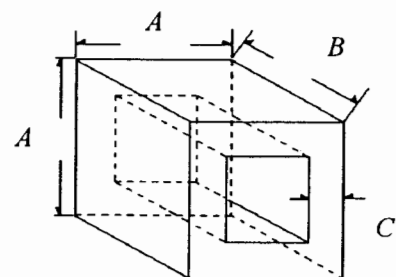


図6. 中空部分を有する立体形状

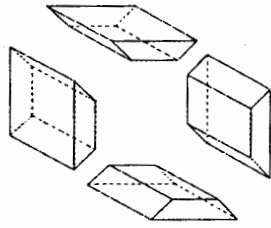


図7. 4個の台形への分割

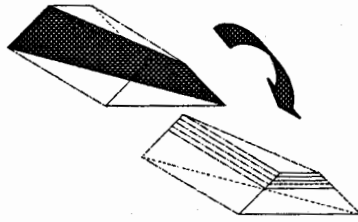


図8. 対角線面に沿った分割

ここで、図6に示す中空部分を有する立体形状の磁気回路を考える。まず、この立体形状は図7に示すように4個の同一形状の台形に分割することができる。さらに、図8に示すように分割された各々の台形を対角線面に沿って2個の5面体に分割した後、それぞれの5面体を水平方向に $m$ 個の平行面状スライスに分割する。

$m$ 個の平行面状スライスに分割された全体の磁気抵抗、すなわち、図8の右側に示す5面体の水平方向の磁気抵抗は、図9に示すように $m$ 個の磁気抵抗を並列接続することで計算される。(13)式は図9に示す合成の磁気抵抗値を与える。

$$R_1 = \frac{A-2C}{\mu B \cdot C/m},$$

$$R_2 = \frac{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot 1/m}{\mu B \cdot C/m},$$

$$\vdots$$

$$R_i = \frac{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot (i-1)/m}{\mu B \cdot C/m},$$

$$\therefore \frac{1}{R_{TOTAL}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\mu B \cdot C/m}{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot (i-1)/m} \quad (13)$$

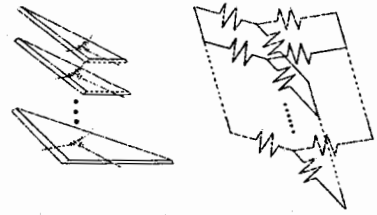


図9. 並列接続された磁気抵抗

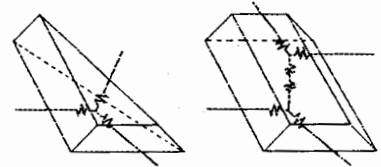


図10. 台形全ての磁気抵抗

(13)式で $m \rightarrow \infty, C/m = dx, i/m = x$ とすれば、

リーマン積分の適用が可能となり、その結果、(14)式のように合成抵抗が計算される。

$$R_{TOTAL} = \frac{C}{\mu B \log \left( \frac{A-2C+2C^2}{A-2C} \right)} \quad (14)$$

(14)式は4個に分割された台形をさらに2分割して得られた5面体の磁気抵抗である。したがって、台形全体としての磁気抵抗は(14)式の磁気抵抗を2個直列に接続したものである。すなわち、(15)式で与えられる。

$$R_{Whole-trapezoid} = \frac{2C}{\mu B \log \left( \frac{A-2C+2C^2}{A-2C} \right)} \quad (15)$$

図10は(15)式の計算を図式的に示したものである。以上のように、他の台形についても同様に磁気抵抗が計算され、最終的に図6に示す中空部分を有する立体形状の円周方向の全磁気抵抗は、(15)式の磁気抵抗を直列に4個接続したものであり、(16)式で与えられる。

$$R_{Whole} = \frac{8C}{\mu B \log \left( \frac{A-2C+2C^2}{A-2C} \right)} \quad (16)$$

### 3.2. 三次元形状の応用

3.1節で、図6に示すような中空四角形の磁気抵抗を求めた。ここでは、中空四角形を中空 $n$ 角形へ拡張する。

まず、図6,7に示したように四角形の中空部分を有する四角柱は4個の同一形状の台形に分割することができる。よって、中空 $n$ 角形も $n$ 個の同一形状の台形に分割できる。

$n$ 個の台形を、四角形の場合と同様に、対角線面に沿って2個の5面体に分割し、それぞれの5面体の磁気抵抗を計算する一般式は(17)式となる。

$$R_{n-5} = \frac{1}{\int_0^C \left[ \frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan\left[\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]} \right] + \left[ \frac{2A}{n} - \frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan\left[\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]} \right] dx} \mu B \quad (17)$$

(17)式から、中空 $n$ 角形の全磁気抵抗は(18)式となる。

$$R_{n-total} = R_{n-5} \times 2 \times n \quad (18)$$

### 3.3. 中空 $n$ 角形の磁気抵抗の評価

ここで、(16)式から磁気抵抗の単位を考えると、磁気抵抗の単位はインダクタンスの逆数、すなわち、 $1/H$ もしくは、 $A/Wb$ である。

ここでは、磁気抵抗から求まるインダクタンスと、解析的に求まるインダクタンスを比較することにより、準三次元磁気抵抗の評価を行う。

まず、中空部分を有する立体形状において、内径0.4m、外径0.5m、高さ1mを一定とし、角数を4から512まで増加した場合のインダクタンスの変化を図11に示す。

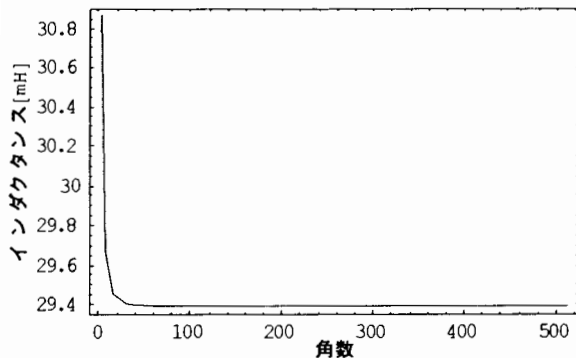


図11. 角数の増加によるインダクタンスの変化

次に、角数512、外径0.5m、高さ1mで一定とし、内径を0.4mから0.01mまで変化した場合のインダクタンスの変化を図12に示す。

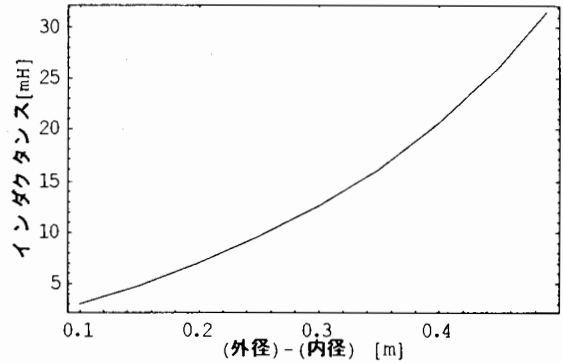


図12. 内径を変化させた場合のインダクタンスの変化

最後に、外径0.5m、高さ1mで一定とし、内径を0.4mから0.01mまで変化し、さらに、角数を4から512まで変化させた場合のインダクタンスの変化を図13に示す。

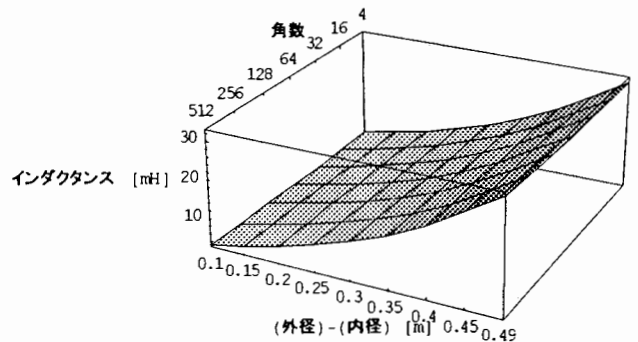


図13. 角数と内径を変化させた場合のインダクタンスの変化

図13から、高さ1m、外径0.5m、内径0.01mの中空512角形の場合に、インダクタンスは最大の32.2541mHとなることがわかる。また、外径1m、内径0.1mで、角数の如何にかかわらず、インダクタンスはほぼ32mHで一定値となる。

(19)式は、半径0.5mの円形断面をもつ、透磁率 $\mu$ の無限長導体において、電流が断面を一樣な密度で流れている場合の単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解である[6, 7, 8, 9, 10]。

$$L = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{4} + \mu_0 \left( \log \frac{2l}{a} - 1 \right) \right\} = 39.8087 \text{mH} \quad (19)$$

この自己インダクタンスの厳密解 39.8087mH と、外径 0.5m, 内径 0.01m, 高さ 1m の 512 角柱に対する磁気抵抗から求めたインダクタンス 32.2541mH を比較すると、頭 1 桁の数値は一致する。

つぎに、導体の中心から離れるに従って変化する磁束密度を勘案するために、外径 0.5m, 内径 0.01m, 高さ 1m の 512 角柱を多層の 512 角形へ分割し、合成磁気抵抗を計算し、インダクタンスを計算する。図 14 は、層数とインダクタンスの関係を示す。

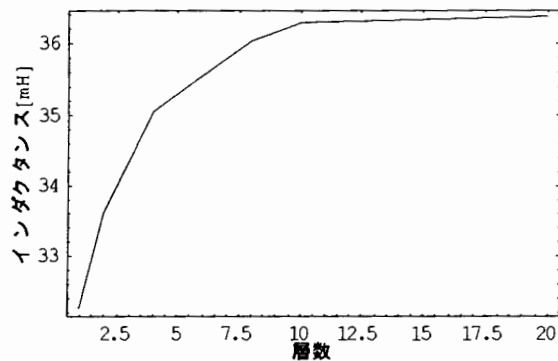


図 14. 層数の増加に伴うインダクタンスの収束過程

図 14 より、層数の増加に伴い、インダクタンスの値がより厳密解へ収束していることが確認できる。すなわち、磁束の広がりや並列の準三次元磁気抵抗によって勘案され、解析解へ収束する。

よって、本論文で提案した準三次元磁気抵抗の妥当性が検証された。

#### 4. まとめ

本論文では、数学的背景が明確な有限要素法に基づいた現代磁気回路理論で、二次元磁気回路解析法について述べ、さらに、この二次元磁気回路を準三次元磁気回路へ拡張する方法を述べた。その結果、二次元磁気抵抗から準三次元磁気抵抗への拡張は、リーマン積分を解くことに帰することを示した。さらに、準三次元磁気抵抗の妥当性を吟味するため、簡単な例題を通して、インダクタンスの計算を行った。その結果、本論文で提案した準三次元磁気抵抗は、磁束密度の変化を複数個の磁気回路で表現でき、厳密解との比較により極めて良好な精度を有することを述べた。

#### 参考文献

- [1] P.P Silvester and Ferrari, "Finite elements for electrical engineers," Cambridge University Press (1990).
- [2] 齋藤兆古, "応用電磁気学入門," 法政大学大学院講義資料.
- [3] Y.Saito, "Three - dimensional analysis of nonlinear magnetostatic fields in a saturable reactor," Comp.Meths.Appl.Mech.Eng, Vol.13, No.1, Jan., 1978, North-Holland.
- [4] Y.Saito, "Three - dimensional analysis of nonlinear magnetodynamic fields in a saturable reactor," Comp.Meths.Appl.Mech.Eng, Vol.22, No.3, June, 1980, North-Holland.
- [5] 藪並隼人, 早野誠治, 齋藤兆古, "有限要素法に基づく磁気回路解析法", 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-00-118, (2000年6月).
- [6] 山田直平, "電気学会大学講座 電気磁気学 (第二改訂版)", オーム社.
- [7] 後藤憲一, 山崎修一郎, "詳解 電磁気学演習", 共立出版株式会社.
- [8] P.Silvester, "Modern Electromagnetic Fields," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J (1968).
- [9] G.A.Toombs, "Electrodynamics of Electrical Machines," Department of Physics, University of Nottingham (1967).
- [10] Johnk, Carl Theodore Adolf, "Engineering Electromagnetic Field & Waves," Library of Congress Cataloging in Publication Data (1975).

原稿受付日

平成 12 年 10 月 17 日