日本AEM学会誌 Vol.10, No.1 (2002) pp.41 - 52

知的可視化情報処理

解 説

Smart Visualized Information Processing

-その２　画像の支配方程式-

-Part 2 Image Governing Equations -

齋藤兆古

Keywords: :Image, Governing Equation, Field Theory, Image Processing

法政大学

1. はじめに

古典物理の集大成である場の理論(Field Theory)は現代物理学の根幹を担う一分野である。ニュートン(Newton)力学に始まり、音響、流体、そして電磁気学等、どのような場の理論の問題も、結果として、支配方程式である偏微分方程式を解くことに帰する。古典的な場の理論はベクトル解析や変分原理などの学術を創始し、現代量子力学を導いた。数学的には、場の理論は直交関数論であるヒルベルト(Hibert)空間論に集約される[1-3]。

他方、現代のコンピュータグラフィックス(Computer Graphics、以下 CG と略記)はデジタル計算機の普及に供なってユーザに対して使い勝手がよい GUI(Graphical User Interface)として開発が始まり、初期の CG は画像を描く数学的手法として比較的単純な幾何学が広く用いられた。近年の小型高性能デジタル計算機は安価であること、また、CG が膨大な情報量を伝達可能であることから、強力で多才な機能を持つ CG 開発が広範におこなわれている。より強力で精緻な CG 開発のために、単純な幾何学で無く、射影(Projective)幾何学、位相(Topological)幾何学、ホモトピー(Homotopy)幾何学さらにセル空間論(Cellular Spatial Theory)等のような、より高度な幾何学を適用せざるを得ない状況に至っている[4-6]。

現代CGの直面する問題は大きく２個に分類される。一方は膨大なデータ量のハンドリングであり、他方は理工学で広範に開発されているシミュレーション技術を CG と如何に統合させるかである。本稿で解説する場の理論による CG はこれらの問題を系統的に解決する一方法である。

場の理論は、画像処理、いわゆる、画像データの圧縮、高解像度画像や動画像の生成などを可能とする。場の理論に拠る CG は画像を構成する画素(Pixel)をベクトル場(Vector field)のポテンシャル(Potential)とみなすことが基本的な着想である。画像を構成する画素をスカラーポテンシャル(Scalar Potential)とみなせば、スカラーポテンシャルへの勾配演算(Gradient Operation)は発散ベクトル(Divergent Vector)を生成する。画像を構成する画素をスカラーポテンシャルとみなし、このスカラーポテンシャルへ勾配演算を適用して得られる発散ベクトルを、場の理論に拠る CG では、イメージベクトル(Image Vector)と呼ぶ。イメージベクトルのノルム(Norm)はスケッチ画像を生成する。また、イメージベクトルと単位方向ベクトル間の内積分布は陰影を持つ 3 次元画像を生成する。さらに、イメージベクトルに対する発散演算(Divergent Operation)はイメージソースデンシティ(Image Source Density)と呼ぶスカラー量の分布を与える。このイメージソースデンシティは、スカラーポテンシャル分布（画素値の分布）に対して２階の空間偏微分演算、すなわち、ラプラシアン (Laplacian)をおこなって得られるから、スカラーポテンシャル中の定数項と１次関数項を含まない。従って、仮にイメージソースデンシティから原画像が厳密に再現されるとすれば、画像の持つ情報を何ら失うこと無く画像データの圧縮が可能である。従来の画像処理ではエッジ抽出にラプラシアンが適用されるが、抽出されたエッジ分布はホモトピー幾何学の特異点分布に他ならない。これは、ホモトピー幾何学では、特異点分布が与えられれば理論上厳密に原画像が再現可能であることに拠る。

電磁気学の電気スカラーポテンシャル分布を画素分布へ対応させれば、イメージベクトルは電界ベクトル、イメージソースデンシティは電荷密度にそれぞれ対応する。電磁気学では、電荷密度と境界条件が与えられれば、電界ベクトルや電気スカラーポテンシャルは、ポアソン方程式(Poisson Equation)の解として与えられる[3,7,8]。

従って、場の理論に拠る CG では、画像がイメージソースデンシティへ圧縮可能であり、逆にイメージソースデンシティと境界条件が与えられれば、

ポアソン方程式（これをイメージポアソン方程式と呼ぶ）を解くことで如何なる解像度の画像も生成される。

次に、動画像、いわゆるアニメーション(Animation)について考えよう。アニメーションは一連の静止画像（これをフレーム、Frame、と呼ぶ）を時間軸方向へ切り替えて生成される。この意味で時間軸方向へは古典的な銀塩写真で構成される映画も離散化されたアニメーションである。デジタルビデオ(Digital Video)と呼ばれるアニメーションと通常の映画の違いは、各フレームが画素で構成されるか銀塩写真で構成されるかに拠る。

他方、場の理論では、時間軸に関する項を含む偏微分方程式、例えば拡散方程式(Diffusion Equation)や波動方程式(Wave Equation)等はヘルムホルツ型方程式 (Helmholtz Type Equation)と呼ばれる[7-9]。いま、アニメーションがヘルムホルツ方程式の解として得られた結果とすれば、全てのアニメーションはヘルムホルツ方程式（これをイメージヘルムホルツ方程式と呼ぶ）で記述可能であることになる。アニメーションが物理系の振る舞いを表現する場合、イメージヘルムホルツ方程式は理工学で行われるシミュレーション技術とアニメーションの系統的な融合技術に他ならない。

ポアソン･ヘルムホルツ方程式へ数値解析手法を適用すると線形システムが得られる。モーダル解析(Modal Analysis)を線形システムへ適用すれば、解ベクトルは固有ベクトル(Characteristic Vector)の線形結合で与えられる[10]。一般に小さい固有値(Characteristic Value)に対する固有ベクトルは変化率が小さく、大きな固有値に対する固有ベクトルは変化率が大きい。これは、画像がポアソンやヘルムホルツ方程式の解として表現可能であれば、小さい固有値に対する固有ベクトルは画像の平均的な情報を与え、大きな固有値に対する固有ベクトルは画像の細かい部分の情報を与えることを意味する。すなわち、離散値系ウェーブレット変換(Discrete Wavelets Transform)とは異なる方法で画像の多重解像度解析(Multi-resolution Analysis)が可能となる。このようなモーダル行列(Modal Matrix)をウェーブレット変換(Wavelets Transform)行列の代わりに採用する多重解像度解析(Multi-Resolution Analysis)手法をモーダルウェーブレット変換(Modal-Wavelet Transform)と呼ぶ[11]。

ここまでの議論はモノクロ画像を前提としたが、波長によって赤（Red、以下 R と略記）、緑（Green、以下 G と略記）、青(Blue、以下 B と略記)成分からなるカラー画像を考えよう。モノクロ画像は 1 種類の画素値の分布で与えられるから、イメージスカラーポテンシャルで表現することが自然である。他方、カラー画像は RGB の各成分の合成で表現されるから、カラー画像がイメージベクトルポテンシャル(Image Vector Potential)で表現されるとすることは合理的である。その結果として、静止画像とアニメーションの支配方程式は、それぞれイメージベクトルポアソン方程式とイメージベクトルヘルムホルツ方程式となる。

理工学で強力に開発された数値解析技術を用いても、ベクトルポアソン方程式やベクトルヘルムホルツ方程式を一般的に解くことは相当に厳しい計算である。この問題を解決する方途はゲージ(Gauge)の活用である。例えば、クーロンゲージ(Coulomb Gauge)が成り立てば、ベクトルポアソン方程式やベクトルヘルムホルツ方程式は、それぞれカーテシアン座標系(Cartesian Coordinate System)の x,y,z 成分 3 個の独立したスカラーポアソン方程式とスカラーヘルムホルツ方程式に帰し、並列計算機を前提とすれば、スカラーポテンシャル問題と同等の計算速度で解く事が可能である[7,8]。これは、イメージベクトルポアソン方程式とイメージベクトルヘルムホルツ方程式をクーロンゲージが成り立つように定式化すれば、モノクロ画像と同様に取り扱い可能であることを意味する。

2. 画像の基礎構成要素 (Graphics Primitives)

2.1 背景(Background)

どのような CG による画像も 2 次元のラスター配列(Raster Array)に格納された数値で構成される。ラスター配列中の数値は 2 種類に分類される。一方はオブジェクト(Object)であり、他方は背景である。多くの場合、背景を構成する画素値は全て同じ値である。しかし、背景がパターンを持つ場合、背景を構成する画素値は異なる値を持つ。従って、背景とオブジェクトの区別は観察者の注目点で決まる。

場の理論に拠る CG では、パターンを持たない背景は単純にイメージベクトルで囲まれない画素の集合と定義される。

2.2 点 (Point)

画像を構成する最も基本的な要素が点であり、それは 2 次元ラスター配列の中で単一の要素のみで構成される。

場の理論に拠る CG では、点は同一な大きさで方向が異なるイメージベクトルで囲まれる画素と定義される。イメージベクトルは、画素値をスカラーポテンシャル U とみなし、(1)式の勾配演算を適用することで得られる。

$$\mathbf{V} = -\nabla U \tag{1}$$

図 1 に点画像とイメージベクトルを示す。いま、$\Delta x, \Delta y$ をそれぞれカーテシアン座標系の x,y 軸方向の画素間の間隔とすれば、(1)式は(2)式の中心差分法で実行される。

Fig. 1. Point (left) and image vectors (right)

$$\mathbf{V}_{i,j} = -\frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x}\mathbf{i} - \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{\Delta y}\mathbf{j} \tag{2}$$

(2)式で、n と m をそれぞれ x, y 軸方向の全画素数とすれば、下添え字 i, j はそれぞれ x 軸上の位置 i=1,2,…,n,と y 軸上の位置 j=1,2,…,m,を示す [7,9]。

図 1 右のベクトルをバーテックス(Vertex)ベクトルと定義すれば、バーテックスベクトルは点を取り囲み、それらのベクトル和がゼロとなる。逆に同一の大きさで方向が異なり、ベクトル和がゼロとなるバーテックスベクトルで囲まれる 1 画素は点と定義される。

セル空間論では、点はゼロ次のセル(Cell)に対応し、ベクトル和がゼロであるバーテックスベクトルはスケルトン(Skeleton)もしくはヌル(Null)と呼ばれる。すなわち、画像要素点 P はゼロ次のセルアタッチメント(Cell Attachment)ベクトル $\mathbf{V}_{Vertex}$ で囲まれるゼロ次のセル

$$\begin{aligned} &P = C_0, \\ &\mathbf{V}_{Point} \supset \mathbf{V}_{Vertex}, \\ &\mathbf{V}_{Vertex} = \mathbf{V}_o, \end{aligned} \tag{3}$$

である。(3) 式で、下添え字 *Point*, *Vertex* および *0* はそれぞれ、点、バーテックスおよびゼロ次セルベクトルを示し、C_0 はゼロ次のセルである。

2.3 **線** (Line)

線は画像を構成する第 2 番目の基本要素である。図 2 に直線の例を示す。

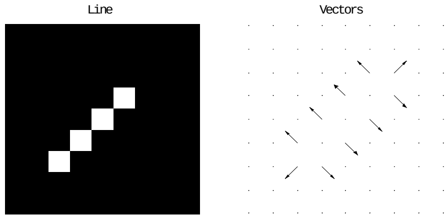

Fig. 2. Line (left) and image vectors (right)

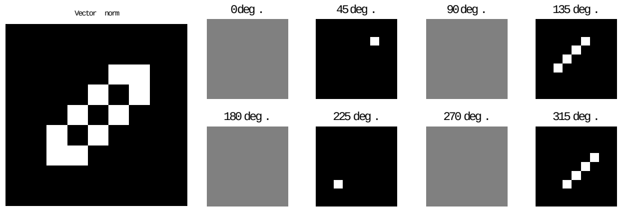

Fig.3. Vector norm (left) and the extracted positions of the directed vectors (right 8 figures).

図 2 右中のイメージベクトルを観察すれば、隣接する点要素が直線と定義され、逆に同じ大きさで異なる方向を持つイメージベクトルで囲まれる画素が直線の存在を意味することが判る。図 2 右中には 10 個のイメージベクトルが存在し、それらは、同じ方向で同じ大きさを持ち隣接バーテックスベクトルグループと線要素の始点と終点に位置する 2 個のバーテックスベクトルグループに分類される。前者のグループはそれらの方向によってさらに 2 グループへ分類される。一連の隣接する同一ベクトル群を線ベクトルと定義すれば、規則的な方向（直線の場合は同一）を持つ一連の隣接するベクトル群が一般的な線、例えば曲線等の存在を意味する。

図 3 は画像ベクトルの大きさの分布と位置を示す。図 3 左に示すベクトルの大きさの分布は(4)式で計算した[10]。

$$\left|\mathbf{V}_{i,j}\right| = \sqrt{\mathbf{V}_{i,j} \cdot \mathbf{V}_{i,j}} \tag{4}$$

さらに、図 3 右に示す各ベクトルの位置は(5)-(7)式で計算される内積値の最大値を取り出すことで抽出した。

$$\mathbf{V}_\theta \cdot \mathbf{V}_{i,j}^N \tag{5}$$

$$\mathbf{V}_\theta = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} \tag{6}$$

$$\mathbf{V}_{i,j}^{N}=\frac{\mathbf{V}_{i,j}}{\left|\mathbf{V}_{i,j}\right|} \tag{7}$$

図 3 左のベクトルの大きさ分布は図 2 のベクトルの大きさに対応し、図 3 右のベクトルの位置は水平に対して角度$\theta=$ 0,45,90,135,180,225,270,315 度方向のベクトルの存在を示している。図 2 右中のベクトルと図 3 右を比較すると、$\theta=45$ と 225 度方向のベクトルは線の始点と終点をそれぞれ示すことが判る。$\theta=135$ 度と 315 度方向のバーテックスベクトル群はそれぞれ、同一方向を持ち、隣接した線ベクトルである。

以上の結果から、単純なベクトルの内積演算で図 2 右中のベクトルが 2 グループに分類可能である。すなわち、2 個のバーテックスベクトルと線ベクトルで囲まれる線スケルトンが直線である。

セル空間論的観点から考えると、線は 2 種類のセルアタッチメントベクトルから構成される。一方は線の始点と終点を表すゼロ次のセルアタッチメントベクトルであり、他方は線を表す 1 次のセルアタッチメントベクトル（線ベクトル）である。線は必ず隣接した点の集合からなる。換言すれば、線はゼロ次のセルC_0（点）の集合からなるため、1 次のセルC_1である。すなわち、線 L とそのベクトルはそれぞれ(8)式で定義される。

$$\begin{aligned} &L=C_1, L\supset P \\ &\mathbf{V}_{Line}\supset\mathbf{V}_{Point}\supset\mathbf{V}_{Vertex} \\ &\mathbf{V}_{Line}=\mathbf{V}_1\supset\mathbf{V}_0 \end{aligned} \tag{8}$$

(8)式で、下添え字 *Line* と 1 はそれぞれ、線と 1 次セルアタッチメントベクトルを示す。

線の終点で他の線の始点と繋ぐことで折れ曲がった線が描ける。折れ曲がった線は直線と異なり、直線の接合点でバーテックスベクトルを持つ。このバーテックスベクトルが連続して規則的に方向が変わる場合が曲線である。

2.4 **面** (Surface)

一連の隣接した点が線を構成したのと同様に、一連の隣接した線が面を構成する。図 4 に面の 1 例を示す。どの線ベクトルも面の内部では打ち消しあうため、図 4 右に示すように、面は隣接する線ベクトルで面は囲まれる。これは、面が常に隣接する線ベクトルとバーテックスベクトルで囲まれ、面の内部は隣接した複数のスケルトンとなることを意味する。3 個のバーテックスと 3 個の直線ベクトルで囲まれる面は三角形の面を意味する。三角形は面を構成する最小数のバーテックスと線ベクトルからなる。従って、多角形の面は 3 個以上のバーテックス・直線ベクトルで囲まれるスケルトンである。他方、ある面を取り囲む隣接するバーテックスベクトルが規則的に方向が変わる場合、これは円形の面が存在することを意味する。

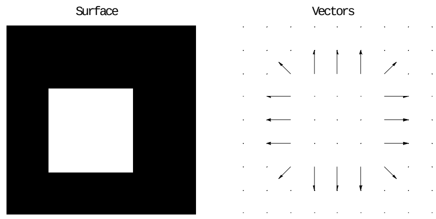

Fig. 4. Surface (left) and image vectors

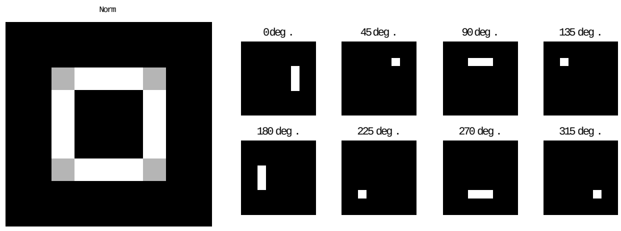

Fig.5. Vector norm (left) and the extracted vector positions (right 8 figures) taking the particular directions.

図 3 左に示すように、直腺の隣接するベクトルは線スケルトンを取り囲むが、図 4 右の面の隣接するベクトルは複数のスケルトンを取り囲む。さらに、直線は常に 2 個のバーテックスベクトルを持つが、四角形は 4 個のバーテックスベクトルを持つ。図 5 は図 4 右に示すベクトルの大きさ分布と単位方向ベクトル間の内積演算で抽出されたベクトルの位置を示している。図 5 右の 45,135,225,315 度方向のベクトルは図 5 左のグレイトーンで表示されている 4 個の小さなベクトルに対応している。直線の場合と同様に、それらはバーテックスベクトルと定義される。他方、図 5 右の 0,90,180,270 度方向のベクトルは図 5 左の白色で表示されている大きなベクトルに対応している。これらは線ベクトルであり、これらの線ベクトルは隣接する複数のスケルトンを取り囲む。

バーテックスと線ベクトルは、それぞれゼロ次と 1 次のセルアタッチメントベクトルである。換言すれば、面は 1 次セル要素、すなわち、線で構成されるため、面は（９）式で定義される２次のセル要素C_2である。

$$S = C_2, S \supset L$$

$$\mathbf{V}_{Suface} \supset \mathbf{V}_{Line} \supset \mathbf{V}_{Point} \supset \mathbf{V}_{Vertex} \qquad (9)$$

$$\mathbf{V}_{Surface} = \mathbf{V}_2 \supset \mathbf{V}_1 \supset \mathbf{V}_0$$

2.5 **重なった面** (Overlapped Surfaces)

立体の議論を行う前に、ここでは、図６に示す面の重なりについて少し吟味しておこう。

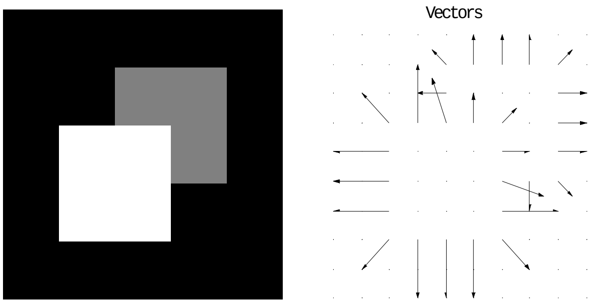

Fig. 6. Overlapped surfaces (left) and image vectors (right).

図６右に示す画像ベクトルは大きく 2 種類へ分類される。一方は線ベクトルであり、他方はバーテックスベクトルである。図４右に示すように単一の長方形は4個のバーテックスベクトルを持つ。このため、2 個の長方形は 8 個のバーテックスベクトルを持たねばならない。しかし、図６右では 15 個のバーテックスベクトルが存在する。これは背面の長方形の 1 バーテックスベクトルが前面の長方形で失われるが、面の重なりが新たな 8 個のバーテックスベクトルを生成しているためである。これらの生成されたバーテックスベクトルは重なった線のエッジ(Edge)に沿って現れる。すなわち、図形のオブジェクト(Object)中の重なりや接触は元のバーテックスベクトルを失うが、新たなバーテックスベクトルを生ずる。しかし、図６左の長方形が全く同じサイズであり、完全に重なっていれば、4 個のバーテックスベクトルが図４右のように存在する。これは背面の長方形が前面の長方形に隠れてしまうためである。図６右のように長方形が同一サイズでも完全に重ならない場合、重なったエッジでバーテックスベクトルの数は増加する。

このように画像ベクトルの分布は画像オブジェクトの複雑さのみならずオブジェクトの重なりも示す。セル空間論的には、ゼロ次のセルアタッチメントベクトルの増加、もしくは減少は画像オブジェクトが重なっているか否かを意味する。重なった面の画像は面のエッジとバーテックスからなり、２次のセル C_2 である。

2.6 **立体** (Body)

隣接する面で囲まれた空間は立体と呼ばれ、重なった面の特別な場合である。立体と単なる重なった面との基本的な違いは、立体は面で完全に取り囲まれる 3 次元空間を持つが、単なる面の重なりは 3 次元空間を持たない点にある。これは、図７右に示す斜め方向に交互に等しいイメージベクトルで表されるエッジを観察すれば了解できる。斜め方向に交互に等しいイメージベクトルは、図８右で、135 度と 315 度の角度持つベクトルとして抽出される。図８で、右図と左図はそれぞれ、主要な画像ベクトルの大きさ分布と位置を示す。

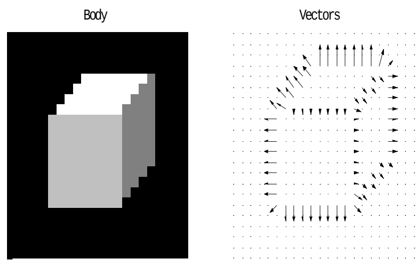

Fig. 7. Body (left) and image vectors

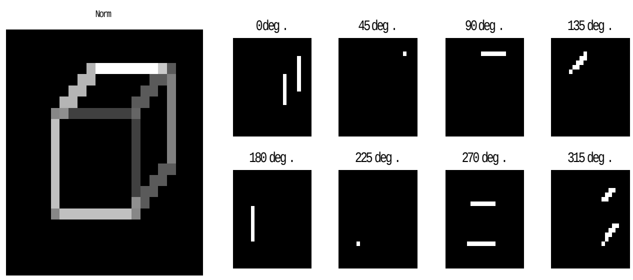

Fig.8. Vector norm (left) and the extracted vector positions (right 8 figures) taking the particular directions.

このように、セル空間論では、立体は 3 次のセルである。これは、2 次のセルである面から立体が構成されるためである。換言すれば、立体 B は以下のように定義される。

$$B = C_{3,} B \supset S$$

$$\mathbf{V}_{Body} \supset \mathbf{V}_{Suface} \supset \mathbf{V}_{Line} \supset \mathbf{V}_{Point} \supset \mathbf{V}_{Vertex} \qquad (10)$$

$$\mathbf{V}_{Body} = \mathbf{V}_3 \supset \mathbf{V}_2 \supset \mathbf{V}_1 \supset \mathbf{V}_0$$

ここで、下添え字 *Body* と 3 は、それぞれ立体と 3 次のセルアタッチメントベクトルであることを示す。

2.7 **画像の基礎構成要素のまとめ**

カラー像の 1 成分、若しくはそれらの組み合わせはモノクロ画像を生成し、モノクロ画像を構成

する画素をスカラーポテンシャル U と見做し、勾配演算で発散ベクトル $\mathbf{V}$ を生成した。

$$\mathbf{V} = -\nabla U \tag{11}$$

どのような形状のオブジェクトもセル空間構成要素であるゼロ次のセル C_0 点、1 次のセル C_1 線、2 次のセル C_2 面、3 次のセル C_3 立体の集合に分解できる。それぞれのセル空間構成要素、点、線、面、立体は個々のベクトル分布を持つ。このため、我々は 4 個の画像セルアタッチメントベクトル分布を持つ。

$$\begin{aligned} -\nabla U_{Vertex} &= \mathbf{V}_{Vertex} \\ -\nabla U_{Line} &= \mathbf{V}_{Line} \\ -\nabla U_{Surface} &= \mathbf{V}_{Surface} \\ -\nabla U_{Body} &= \mathbf{V}_{Body} \end{aligned} \tag{12}$$

最も基本的な画像の構成要素は点であり、それは 1 画素からなる。第 2 番目は一連の隣接した点の集合で表される線である。同様に、第 3,4 番目の画像の構成要素は面と立体であり、それぞれ、線と面の集合で表される。これは、高次の画像の構成要素は低次の構成要素の集合で表されることを意味し、セルアタッチメントベクトルで表現すれば(13)式の関係が成り立つことを意味する。

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_{Line} \supset \mathbf{V}_{Vertex} \\ &\mathbf{V}_{Surface} \supset \mathbf{V}_{Line} \\ &\mathbf{V}_{Body} \supset \mathbf{V}_{Surface} \end{aligned} \tag{13}$$

このように CG に対する場の理論の適用はセル空間構造の基礎構成要素を系統的、且つ、階層的に分類可能とする。いま、下添え字 0､1,2,3 が次数を表すとすれば、$\mathbf{V}_{\mathrm{skelton}}$ Õ$\mathbf{V}_{Vertex}$ Õ $\mathbf{V}_{Line}$ Õ $\mathbf{V}_{Surface}$ Õ $\mathbf{V}_{Body} = \mathbf{V}_{Null}$Õ$\mathbf{V}_0$ Õ $\mathbf{V}_1$ Õ $\mathbf{V}_2$ Õ$\mathbf{V}_3$ が成り立つ。このようにして任意の空間が構成され、これは J.H.C. Whitehead が 1950 年に提唱したセル空間構造に対応する[4]。各画像構成要素はそれぞれ個々の画像ベクトル分布を持ち、それらの自由度は構成要素の数に反比例する。すなわち、点の組み合わせが他の構成要素を与えるため、点が最も自由度の高い画像の基本構成要素である。その結果として、どのような 3 次元画像もセル空間構造の 4 基本画像構成要素の集合で構成される[4,5,12]。

3. 画像生成 (Image Generation)

3.1 スケッチ画像(Sketch Image)

スケッチ画像はオブジェクトの特徴を抽出し、モノクロ線図の集合で人間の感性を前提として描かれる芸術作品である。この意味で、スケッチ画像を計算機で機械的に描くことは不可能である。他方、我々はモノクロ画像のイメージベクトルを抽出することが可能であり、もし、このイメージベクトルの分布が画像の個々の特徴を反映しているとすれば、ある意味でのスケッチ画像を生成可能である。このようなスケッチ画像を描く最も単純な方法はイメージベクトルの大きさ分布をプロットすることである。図 9 にスケッチ画像生成の１例を示す。図 9 左がサンプル画像であり、図 9 中央が(2)式の演算で得られたサンプル画像のイメージベクトル分布である。図 9 右は、サンプル画像のイメージベクトル分布の大きさを白黒反転して得られたスケッチ画像である。

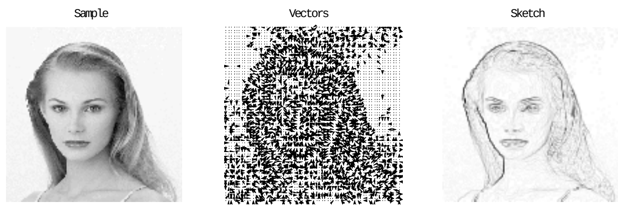

Fig.9. Sample image (left), image vectors (middle) and sketch image (right).

3.2 レリーフ画像(Relief Image)

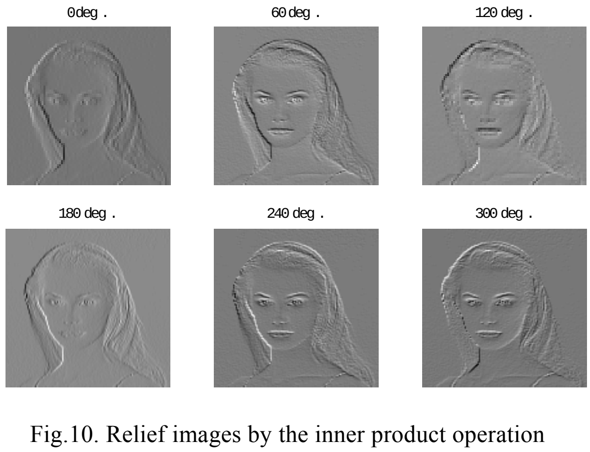

Fig.10. Relief images by the inner product operation between the image vectors in Fig.9 and unit directional vector.

イメージベクトルの大きさ分布はスケッチ画像を与えた。他方、(6)式による図 9 中のイメージベクトル分布と単位方向ベクトルの内積分布は図１０に示すレリーフ画像を与える。レリーフイメージ生成では、単位方向ベクトルが光の投影角に対応して陰影を与えたレリーフ画像となることが判

る。
CG では、光の陰影を与えた画像を 3 次元画像と呼ぶ。その意味で単純な単位方向ベクトルとイメージベクトルの内積演算は 3 次元画像を与える。さらに、図１０のレリーフ画像を構成する画素値を最大値 1、最小値 0 として正規化した画像と図９左の原画像を畳み込み(Convolution)演算すれば、図１１に示すように陰影を強調した画像が得られる。

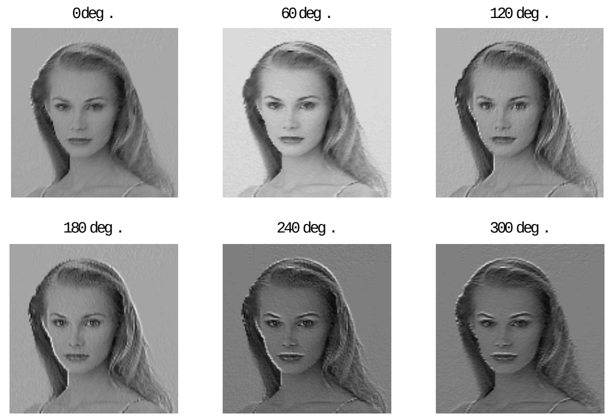

Fig.11. High contrast images generated by convolving the original and normalized relief images in Fig.10.

3.3 **高解像度画像の生成**(High Resolution Image)

ベクトルの発散演算はベクトル量をスカラー量へ変換する。この場合、このスカラー量はベクトル生成の源となるため、このスカラー量はソースデンシティー(Source Density)と呼ばれる[3,7,8]。
ベクトル **V** に対する発散演算は(14)式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
div(\mathbf{V}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)\cdot\left(V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)\cdot\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}\right) \qquad (14) \\
&= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

ここで、V_x、V_y はそれぞれ、ベクトル **V** の x、y 軸成分である。
いま、ソースデンシティーを σ とすれば、静的なモノクロ画像の支配方程式は(15)式で与えられる。

$$-\nabla^2 U = \sigma \qquad (15)$$

(15) 式はポアソン (Poisson) の方程式と呼ばれ、左辺の演算子 (Operator) はラプラスシアン (Laplacian) と呼ばれる。(14) 式のスカラーポテンシャル U は画素値に対応するから、ラプラスシアンは画像データの定数項と空間の 1 次関数項を削除する。すなわち、(15)式のソースデンシティ σ が与えられ、スカラーポテンシャル U が厳密に再現されるとすれば、全く原画像の情報を失うこと無く画像の圧縮が可能である。画像を与える画素値の集合は離散化された量であるから、実際のラプラスシアンは適当な離散化法で実行される。本稿では、(16)式で与えられる 9 点有限差分法でラプラシアンを近似している[9]。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{1}{6}[& U_{i-1,j-1} + U_{i-1,j+1} + 4U_{i-1,j} + 4U_{i+1,j} \\
&+ U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + 4U_{i,j+1} + 4U_{i,j-1} - 20U_{i,j}]
\end{aligned} \qquad (16)
$$

(16) 式で、x, y 軸方向の刻み幅 (Step-width) は 1 と仮定している。また、画像の外周の境界条件はゼロディリクレイ(Zero Dirichlet)としている。
(16) 式のプラスシアンは画像のスカラーポテンシャルで空間の 2 次関数以上の変化率を持つ部分を抽出するが、これは単に画像データの圧縮だけでなく、ホモトピー的な観点から画像の特異点抽出(Singular Point Extraction)にも対応する。いま、イメージソースデンシティ σ が(15)式または(16)式で与えられたとすれば、有限要素法や有限差分法等の離散化法を(15)式に適用すれば(17)式のシステム方程式を得る[7-9]。

$$S\mathbf{X} = \mathbf{Y} \qquad (17)$$

ここで、S、**X**,**Y** はそれぞれ、システム行列、解ベクトルそして入力ベクトルである。システム行列 S は一般に正定値(Positive Definite)の正方行列であり、その次数は望まれている画像の解像度によって決まる。例えば、$n \times m$ の解像度であるとすれば、システム行列 S は $n \times m$ 行 $n \times m$ 列、解ベクトル **X** も入力ベクトル **Y** も $n \times m$ 次のベクトルとなる。
いま、(18)式の同次方程式を考える。

$$S\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$$

または (18)

$$|S - \lambda| = 0$$

ここで、λは固有値を要素とする対角行列である。
　システム行列 S が $n\times m$ 行 $n\times m$ 列とすれば、(18)式から $n\times m$ 個の固有値を求めることができる。いま、$\mathbf{E}_i$,i=1,2,…, $n\times m$ を固有値 λ_i, i=1,2,…, $n\times m$ に対するノルムを 1 へ正規化された固有ベクトルとすれば、(17)式の解ベクトル **X** は(19)式で与えられる[10]。

$$\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{n\times m} w_i \mathbf{E}_i \tag{19}$$

ここで、$w_i, i=1,2,...,n\times m,$ は入力ベクトル Y によって決まる係数である。
　(19) 式において、モーダル行列 Z を (20) 式で定義すれば、

$$Z=\left[\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \quad . \quad \mathbf{E}_{n\times m}\right] \tag{20}$$

解ベクトル **X** は(21)式のように書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}&=Z\mathbf{W}\\ \mathbf{W}&=\left[w_1 \quad w_2 \quad . \quad w_{n\times m}\right]^T\end{aligned} \tag{21}$$

(21) 式で上添え字 T は行列の転置を示す。
　(21) 式の解ベクトル **X** を (17) 式へ代入すれば、

$$\left[Z^T SZ\right]\mathbf{W}=Z^T\mathbf{Y}$$

$$Z^T SZ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdot & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n\times m}\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$Z^T\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ .\\ g_{n\times m}\end{bmatrix}$$

を得る。
　よって、(19)式の係数 $w_i, i=1,2,...,n\times m,$ は(23)式で与えられる。

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\dfrac{g_1}{\lambda_1}\\ \dfrac{g_2}{\lambda_2}\\ .\\ \dfrac{g_{n\times m}}{\lambda_{n\times m}}\end{bmatrix} \tag{23}$$

　(23) 式の係数ベクトル **W** を (21) 式へ代入して解ベクトル **X** を得る。このように固有値と固有ベクトルを利用した線形システムの解析法をモーダル解析(Modal Analysis)という。
　図１２左、中、右へそれぞれ、イメージソースデンシティ、原画像の解像度128×128および 4 倍の解像度 256×256 画像を示す。

Fig.12. 128 by 128 source densities (left), 128 by 128 resolution image (middle) and 256 by 256 resolution image (right).

　図１２左のイメージソースデンシティは図９左の一定値と 1 階空間微分の項が削減されていることのみならず、図１２中の画像は図９左の原画像と全く同じであるから、ホモトピー理論における画像の特異点に他ならない。図１２右は原画像の 4 倍の高解像度の画像がポアソン方程式の解として補間されて生成されることを意味する。

3.4 **動画像の生成**(Animation)

　我々がアニメーション(Animation)と呼ばれる動画像を場の理論を適用して生成しようとすれば、支配方程式はヘルムホルツ(Helmholtz)型の方程式となる。ポアソン方程式はアニメーションを構成する 1 フレームを生成可能とするが、ヘルムホルツの方程式は時間の項を陽的に含むため、時系列で変化する動画像生成には有用である。空間のみならず時間微分を含むヘルムホルツ方程式は(24)式で与えられる。

$$\nabla^2 U+\frac{\partial}{\partial t}\alpha U+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\beta U=-\sigma \tag{24}$$

(24) 式で、t, α, β はそれぞれ、時間、次元 [t/m^2] とさらに次元 [t^2/m^2] を持つ係数である。(24) 式で、$\alpha = 0$ の場合は拡散方程式 (Diffusion Equation) 、$\beta = 0$ の場合は波動方程式 (Wave Equation) と呼ばれる [3,7,8]。前者は広がるアニメーションや縮小するアニメーションを表現するのに有用であり、後者は振動や反復的なアニメーションを表現するのに有効である。従って、イメージヘルムホルツ方程式(24)は如何なるアニメーションも表現可能である。

(24)式の時間の 2 階微分項へ状態変数法を適用して時間の 1 階微分を含む形へ変形した後、空間に対する離散化法を適用すれば(25)式の関係を得る[9]。

$$\left[S' + \frac{\partial}{\partial t} H'\right] \mathbf{X}' = \mathbf{Y}'$$
$$or$$
$$\left[H'^{-1} S' + \frac{\partial}{\partial t} I\right] \mathbf{X}' = H'^{-1} \mathbf{Y}' \tag{25}$$
$$\left[\Gamma + \frac{\partial}{\partial t} I\right] \mathbf{X}' = \mathbf{Y}''$$

(25) 式で、S ' , H'は $2 \times n \times m$ 次の正方行列、**X'**, **Y'** は $2 \times n \times m$ 次の列ベクトル、I は $2 \times n \times m$ 次の単位正方行列である。

(25)式の同次方程式

$$\left[\Gamma + \frac{\partial}{\partial t} I\right] \mathbf{X}' = 0 \tag{26}$$

を考えよう。(18) 式と同様にして、正規化された行列 Γ に対する固有ベクトル

$\mathbf{E}'_i, i = 1,2,...,2 \times n \times m,$ を得ることが可能であり、

その結果として、 (20)式や(21) 式と同様な関係が (27) 式のように導かれる。

$$\left(Z'^T \, \Gamma Z' + \frac{\partial}{\partial t}\left[Z'^T \, IZ'\right]\right) \mathbf{W}' = Z'^T \, \mathbf{Y}'',$$
$$Z'^T \, \Gamma Z' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{2 \times n \times m} \end{bmatrix},$$
$$Z'^T \, IZ' = I, \tag{27}$$
$$Z'^T \, \mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \cdot \\ g'_{2 \times n \times m} \end{bmatrix}, \mathbf{W}' = \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \cdot \\ w'_{2 \times n \times m} \end{bmatrix},$$
$$Z' = \left[\mathbf{E}'_1 \quad \mathbf{E}'_2 \quad . \quad \mathbf{E}'_{2 \times n \times m}\right].$$

(27) 式を用いて係数 $w'_i, i = 1,2,...,2 \times n \times m$ は (28) 式で与えられる。

$$w'_i = \frac{g'_i}{\lambda_i + \frac{\partial}{\partial t}},$$
$$or \tag{28}$$
$$w'_i = \left(w'_{i0} - \frac{g'_i}{\lambda_i}\right) \varepsilon^{-\lambda_i t} + \frac{g'_i}{\lambda_i}, i = 1,2,...,2 \times n \times m$$

ここで、w'_{i0} は w'_i の初期値であり、初期解ベクトル $\mathbf{X}'_0$ を用いて(29)式で与えられる。

$$\mathbf{X}'_0 = Z' \mathbf{W}'_0 = \sum_{i=1}^{2 \times n \times m} w'_{i0} \, \mathbf{E}'_i,$$
$$or \tag{29}$$
$$w'_{i0} = \frac{\mathbf{E}'^T_i \cdot \mathbf{X}'_0}{\left|\mathbf{E}'_i\right|^2} = \mathbf{E}'^T_i \cdot \mathbf{X}'_0, \because \quad \left|\mathbf{E}'_i\right|^2 = 1$$
$$i = 1,2,...,2 \times n \times m$$

初期解ベクトル $\mathbf{X}'_0$ は最初のフレーム画像 U_0 で決定され、最後のフレーム画像 U_∞ は最終解ベクトル **X'**$_\infty$ から決まる。このように初期画像 U_0 と最終画像 U_∞ がそれぞれ、初期解ベクトル $\mathbf{X}'_0$ と入力ベクトル **Y'** の項で与えられれば、時間 t=0 から t=∞間

の如何なるフレーム画像も(24)式の解として生成される。局所的な動きは(24)式のパラメータα, βに依存する。すなわち、(25)式の解は3ケースに分類される。最初は単調減衰・拡大であり、第2は減衰・拡大振動であり、最後は純粋の振動である。(27) 式の固有値$\lambda_i, i = 1,2,...,2 \times n \times m,$は、最初の場合は純実数、第2の場合は実数と虚数部からなり、第3の場合は純虚数である。さらに、(27)式の係数$w'_i, i = 1,2,...,2 \times n \times m,$は個々の固有値$\lambda_i, i = 1,2,...,2 \times n \times m,$を取り得るから、局所的に動くアニメーションが生成される。例えば、図13の右から左が画像の初期値と最終値とすれば、鴎の羽は上向きに動くが頭は下向きに動く。このような動画像においては、(27)式の固有値は鴎の個々の場所に応じて異なった値を取る。

Fig. 13. Stating (left) and ending (right) images of an animation. The wings of a seagull have moved upward but the head has moved downward

もし、アニメーションが物理系、例えば電磁機器中の渦電流を表しているとすれば、この場合のイメージヘルムホルツ方程式は電磁界の支配方程式と同一となる。すなわち、場の理論による CG は物理系シミュレーションの一般化である。

3.5 **カラー画像**(Color Image)

如何なるカラー画像も光の3成分、赤（Red)、緑（Green)、青（Blue）に分解される。これらのカラー成分は完全に独立でなく、周波数が重なる成分もあるが、現実的には独立した色成分とみなすことが出来る。図14はサンプルカラー画像の各成分を示す。これはモノクロ画像で開発された手法がカラー画像の各成分に適用出来ることを意味する。

Fig. 14. Example of the color image components; red (left), green (middle) and blue (right).

よって、カラー画像I_cはR：I_R, G: I_G そして B:I_Bのモノクロ画像の集合である。

$$I_C \in I_R, I_G, I_B \tag{30}$$

いま、x-y-zの3次元カーテシアン座標系を考え、RGB 成分をそれぞれ、y-z、z-x、x-y 平面へ投影された x,y,z 成分としよう。すなわち、カラー画像I_cがベクトルポテンシャル(Vector Potential)**A** で表現されるとする。

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_R(y,z) + \mathbf{j}A_G(z,x) + \mathbf{k}A_B(x,y) \tag{31}$$

ここで、A_R, A_G, A_Bは赤、緑、青成分に対応し、$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$は$x,y,z$軸方向の単位方向ベクトルとする。

ベクトルの空間微分は回転(Rotation)演算で行われる。すなわち、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_R(y,z) & A_G(z,x) & A_B(x,y) \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_B(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial A_G(z,x)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_R(y,z)}{\partial z} - \frac{\partial A_B(x,y)}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial A_G(z,x)}{\partial x} - \frac{\partial A_R(y,z)}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{32}$$

で行われる。(32)式はモノクロ画像が発散ベクトルを生成するのに対し、カラー画像は回転ベクトルを生成することを意味する。さらに、ベクトルポテンシャル **A** からベクトルソースデンシティ **J** を得るためには、ベクトルポアソン方程式を考えざるを得ない。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \tag{33}$$

ここで

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_R(y,z) + \frac{\partial}{\partial y} A_G(z,x) + \frac{\partial}{\partial y} A_B(x,y) \equiv 0. \tag{34}$$

が(31)式から成り立つ。(34) 式はクーロンゲージ(Coulomb gauge) と呼ばれる [3,7,8]。よって(33)式は(35)式となる。

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}$$

or

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 A_R}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_R}{\partial z^2} &= J_R \\ -\frac{\partial^2 A_G}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_G}{\partial x^2} &= J_G \\ -\frac{\partial^2 A_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_B}{\partial y^2} &= J_B \end{aligned} \tag{35}$$

ここで、J_R, J_G, J_B はそれぞれ、赤、緑、青のカラーイメージデンシティと呼ぶ。モノクロ画像とカラー画像の違いは、カラー画像はモノクロ画像の3倍のメモリーと計算機CPUを必要とする点にある。しかし、この違いは並列CPUを前提とした計算機を用いれば克服できる。例えば、カラー画像を構成するRGB成分をモノクロ画像として並列に処理するとすれば、カラー画像の分解と合成に余分な計算が必要となるのみである。

4. まとめ

本稿では、知的可視化情報処理に関する解説の第2回として、

1) 場の理論によるCG、
2) 画像生成、

について述べた。

場の理論による CG は、主として画像を構成する基本要素である背景、点、線、面、立体に関して従来のセル空間理論との関係について述べた。その結果、場の理論に従来のセル空間理論が包含されることを明らかにした。

画像の生成は大きく分けて5部分に分類できる。最初はスケッチであり、これは画像ベクトルの大きさから描かれる。第 2 番目はレリーフ画像のような陰影を持つ3次元画像の生成である。これは、画像ベクトルと単位方向ベクト間の内積計算で実現できる。第 3 番目は任意解像度の画像生成である。これはイメージポアソン方程式の解として実現可能であることを述べた。第 4 番目は動画像の生成である。これはイメージヘルムホルツ方程式の解として任意のフレーム画像が生成可能であることを述べた。最後に、カラー画像である。カラー画像は、クーロンゲージが成り立つベクトルポテンシャルを仮定すれば、モノクロ画像と同様な処理が可能であることを述べた。

少し理論面を強調しすぎて抽象化した感じを与えるかも知れないが、より具体的な例を次回以降に取り上げることで判りやすくしたい。

今回の原稿も本学の院生（博）遠藤久君に校正して頂いた。歳は取りたく無い物である。相変わらずミスが多い。書面を借りて同君へお礼を申し上げる。

参考文献

[1] P.M.Morse and H. Feshbach, “Methods of Theoretical Physics,” McGraw-Hill, New York (1953).

[2] E.A.Hylleraas, “Mathematical and Theoretical Physics, Wiley-Interscience, New York (1970).

[3] J.D.Jackson, "Classical Electrodynamics 3rd Edition," John Wiley & Sons, New York (1998).

[4] J.H.C.Whitehead, "Combinational Homotopy 1," Bulletin of American Mathematical Society, Vol.55, pp.213-245 1949

[5] A. T. Fomenko and T. L. Kunii, "Topological Modeling for Visualization," Springer- Verlag, Tokyo (1977).

[6] T.L.Kunii, “Computational Shape Modeling: Valid vs. Invalid”, Proceedings of International Conference on Shape Modeling and *Applications '99 (SMI99),* (March 1-4, 1999, Aizu-Wakamatsu, Japan) in press, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, U. S. A.

[7] P.P.Silvester “Modern Electromagnetic Fields”, Prentice-Hall, Inc., 1968.

[8] P.P.Silvester and R.L.Ferrari, “Finite elements for electrical engineers”, Cambridge University Press (1983).

[9] R.W.Hamming, “Numerical Methods for Scientists and Engineers,” McGraw-Hill, New York (1962).

[10] G.Strang, " Linear Algebra and its Applications ", 1976, Academic Press, Inc.

[11] H.Endo, I.Marinova, S.Hayano, Y.Saito and K.Horii, “Modal-Wavelets and Its Applications,” *Proceedings of 2nd Japan-Australia-New Zeeland Joint Seminar*, 24-25 January, Kanazawa, The Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics (2002).

[12] T.L.Kunii, Y.Saito and M.Shiine, “A Graphics Compiler for 3-Dimensional Captured Image Database and Captured Image Reusability”, *Proceedings of IFIP Workshop on*

Modeling and Motion Capture Techniques for Virtual Environments (CAPTECH98), November 26-27, 1998, Geneva, Switzerland, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, U.S. A.